Devoir à la maison n° 2

À rendre le 7 octobre avant le DS

Pseudo-inverse

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on appelle endomorphisme canoniquement associé à M, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, noté m, dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $M(i,j)$ représente le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice (colonne) de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est notée J_n.

Définition *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, une matrice $A' \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$AA' = A'A \tag{1}$$
$$A = AA'A \tag{2}$$
$$A' = A'AA' \tag{3}$$

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

1) Montrer que l'existence d'un pseudo-inverse implique que

$$\operatorname{rg} a = \operatorname{rg}(a^2).$$

Inversement on suppose maintenant que $\operatorname{rg}(a) = \operatorname{rg}(a^2)$. On note r cet entier.

2) Montrer que l'image et le noyau de a sont en somme directe :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(a) \oplus Ker(a).$$

3) Montrer qu'il existe $B \in \mathscr{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, B inversible et $W \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, W inversible, telles que

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

4) Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.

Considérons un pseudo-inverse quelconque A' de A et a' l'endomorphisme canoniquement associé à A'.

5) Montrer que $\operatorname{Ker}(a)$ et $\operatorname{Im}(a)$ sont stables par a' et qu'il existe $D \in \mathscr{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ telle que

$$A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}.$$

6) Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a et préciser ce que vaut $W^{-1}(AA')W$.

7) Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

— FIN —