Devoir à la maison n° 3

À rendre le 12 novembre

Dans tout ce problème, on désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

On pourra utiliser librement le résutlat classique suivant : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ, appelée ***constante d'Euler***, et :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité en 0 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1}\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{n}}$ exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale, puis à l'aide d'un changement de variable affine, établir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{u}{n})^n}{u}\mathrm{du} - \int_1^{\mathrm{n}} \frac{(1-\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{n}})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}$$

3) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n : \begin{cases} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{(1-\frac{t}{n})^n}{t} & \text{si } 1 \leqslant \mathrm{t} \leqslant \mathrm{n} \\ 0 & \text{si } \mathrm{n} < \mathrm{t} \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Démontrer que l'on a : $\forall\, t \in [0,1[,\ \ln(1-t) \leqslant -t$.

5) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{du}$.

6) Justifier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ des fonctions f_n définies dans la question **3)**.

7) Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_1^n \frac{(1-\frac{u}{n})^n}{u}\mathrm{du}$$

8) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du}$.

9) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in]0,1],\ 0 \leqslant \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t} \leqslant 1$$

10) Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}\mathrm{du}$$

11) En déduire que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{u}\mathrm{du} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}}{\mathrm{u}}\mathrm{du}.$$

— FIN —