Devoir à la maison n° 4

À rendre le 2 décembre

Ce problème est long, vous pouvez ne traiter qu'une, ou deux, ou trois parties, à votre convenance.

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie **III.** qui utilise des résultats de la partie **I.**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I. Généralités

1) Déterminer l'ensemble de définition de F.

2) On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3) Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4) *Dérivabilité de F*

a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

b) Pour $n \geqslant 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5) *Lien avec* ζ

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n$, où $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6) *Étude de la convergence*

a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geqslant \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

7) *Cas où* $x = 1$

On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{X(n-X)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{n-X}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$.

c) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8) *Développement asymptotique en 1*

a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

9) *Développement asymptotique en 1 (bis)*

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a) Justifier que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

b) Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

c) Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

d) Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

e) En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10) *Application*

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

— **FIN** —