Devoir à la maison n° 5

À rendre le 7 janvier

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.
Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} | a \leqslant n \leqslant b\}$

A- Une première formule

1) Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

2) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

3) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \tag{1}$$

B- Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

4) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

5) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0,\dots,H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

6) Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

7) Pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

8) Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k,j) en paramètre et qui renvoie la valeur $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n,k)` renvoie le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$.

9) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$$

10) À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k.

11) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

12) Calculer explicitement P_2 et P_3.

13) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

14) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

15) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

C- Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

16) Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

17) Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{2}$$

18) En déduire que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

19) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}. \tag{3}$$

— FIN —