Devoir à la maison n° 6

À rendre le 28 janvier

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer la probabilité $P(S_n > nam)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $1/2$. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I. Cas de la loi de Poisson

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre $1/2$. L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $P(S_n > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1) Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
2) Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la variable aléatoire X_1.
3) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n$.
4) Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B

5) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\, n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k = \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \leqslant 1.$$

7) Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$, où, pour tout $k \in N^*$, la fonction u_k est définie sur $[0,+\infty[$ par $u_k\colon x \longmapsto (1+kx)^{-k}(1/2)^k$, est normalement convergente sur $[0,+\infty[$.

8) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

9) En déduire que

$$P(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

10) À l'aide de la formule de Stirling, en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$P(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\alpha^n).$$

II. Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

Notations

— n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

— Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, on note $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max\left\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)\right\}$.

— On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* (resp. *strictement positive*) et l'on note $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

— Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est dit *positif* (resp. *strictement positif*) et l'on note $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

— On définit une relation d'ordre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$.

— On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geqslant y$ si $x - y \geqslant 0$.

— On écrit de même $A > B$ si $A - B > 0$ et $x > y$ si $x - y > 0$.
— Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = \Big(|a_{i,j}|\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
— Si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = \Big(|x_i|\Big)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.
— On dit que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}\,(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si $|\lambda_0| > |\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A) \setminus \{\lambda_0\}$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 1 : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A. Le sous-espace propre associé $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et dirigé par un vecteur propre strictement positif.

Proposition 2 : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{R}$, si Y est un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, ou bien vers un vecteur directeur strictement positif de $E_{\rho(A)}(A)$.

Cette partie a été enlevée, on admettra les résultats précédents, que l'on pourra utiliser librement.

III. Une inégalité relative aux chaînes de Markov

Dans toute cette partie III, N est un entier naturel non nul fixé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers $[\![0, N]\!]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}) \in [\![0, N]\!]^{n+1}$,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

On suppose que, pour tout $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, la probabilité $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépend pas de n et est strictement positive. On note alors $q_{i,j} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *chaîne de Markov homogène sur* $[\![0, N]\!]$ *de matrice de transition* $Q = (q_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant N}$. On attire l'attention sur le fait que la numérotation des lignes et des colonnes de Q commence à 0 et que Q est une matrice carrée de taille $N + 1$.

Dans toute la suite, pour $n \geqslant 1$ fixé, on pose $\Pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.A. Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$

11) Justifier que, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = 1$.

12) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$.

13) En déduire que la loi de X_1 détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov et l'on pose

— $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;

— $a_{i,j}(t) = q_{i,j}\,\mathrm{e}^{\,jt}$ pour tout $(i,j) \in [\![0,N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$;

— $A(t) = \Big(a_{i,j}(t)\Big)_{0\leqslant i,j\leqslant N} \in \mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$;

— $z_j(t) = P(X_1 = j)\,\mathrm{e}^{\,jt}$ pour tout $j \in [\![0,N]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$;

— $Z(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.B Définition de la fonction de taux λ

Soient n un entier naturel non nul et t un réel fixé. On admet (*énoncé modifié*) que l'espérance de la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\,tS_n}$ vaut

$$\mathrm{E}\Big(\mathrm{e}^{\,tS_n}\Big) = \sum_{j=0}^{N} Y_j^{(n)}(t), \quad \text{où} \quad Y^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} Y_0^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_N^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \Big(A(t)^\top\Big)^{n-1} Z(t).$$

14) Justifier que $A(t)^\top$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t) > 0$.

15) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln\Big[\mathrm{E}\Big(\mathrm{e}^{\,tS_n}\Big)\Big]}{n} = \lambda(t)$ où $\lambda(t) = \ln\Big(\gamma(t)\Big)$.

III.C Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python.
On shunte cette partie.

III.D. Une majoration théorique et son interprétation

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^*(x) = \sup_{t\geqslant 0}\Big(tx - \lambda(t)\Big)$. On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions $\left(t \longmapsto \dfrac{\ln\Big[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\,tS_n})\Big]}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction $t \longmapsto \ln\Big(\gamma(t)\Big)$ démontrée à la question **15)** est uniforme sur $\mathbb{R}_+$. On admet également dans toute la suite l'existence de $m = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{E}(S_n)$ et que $\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leqslant m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$

Dans toute la suite, ε désigne un réel strictement positif.

16) Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ln\Big[\mathrm{E}\Big(\mathrm{e}^{\,tS_n}\Big)\Big] \leqslant n\Big(\lambda(t) + \varepsilon\Big).$$

17) À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\,tS_n}$, montrer que, pour $a > 1$, $n \geqslant n_0$ et $t \geqslant 0$,
$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{\,-ntam} \times \mathrm{e}^{\,n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

18) En déduire que, pour $n \geqslant n_0$,

$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}.$$

19) Donner un sens concret à m en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

III.E Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On zappe cette partie.

— **FIN** —