

### Devoir surveillé n° 1

Durée : 2 heures, calculatrices et documents interdits

#### Partie I.

Notons  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ . Il est clair que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, et que cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous noterons  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- 1) Quelle est la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  ?
- 2) Qu'en déduisez-vous au sujet de  $\mathcal{C}_f$  ?
- 3) Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant » et « est dominé par ».

$f(t)$  .....  $e^t$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

$f(t)$  .....  $\frac{e^t}{t}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

$f(t)$  .....  $\frac{e^t}{t^2}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre réponse.

- 4) Quelle est la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  ?
- 5) Soit  $t \in \mathbb{R}$ , expliciter  $f'(t)$ .
- 6) Dressez le tableau des variations de  $f$ .
- 7) Soit  $t \in \mathbb{R}$ , expliciter  $f''(t)$ .
- 8) Montrer que l'équation  $f''(t) = 0$  possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée  $\alpha$ . Vous ne chercherez pas à calculer  $\alpha$ .
- 9) Prouver l'encadrement  $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$ .
- 10) Expliciter le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.  
Que pouvez-vous en déduire concernant  $\mathcal{C}_f$  ?
- 11) Tracez la courbe représentative de  $f$ . Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

#### Partie II.

Au vu des expressions de  $f(t)$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$ , nous nous proposons d'établir que l'assertion  $\mathcal{A}(n)$  suivante est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

Il existe un polynôme $P_n$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$ .
--

Vous allez raisonner par récurrence sur  $n$ .

- 12) Il est clair que  $\mathcal{A}(n)$  est vraie pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ ;

Vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de  $P_n$  pour ces valeurs de  $n$ .

**13)** Fixons  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons l'assertion  $\mathcal{A}(n)$  acquise. Etablissez l'assertion  $\mathcal{A}(n+1)$ ;

Vous déterminerez l'expression de  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  et  $P'_n$ .

Il résulte donc des questions **12)** et **13)** que l'assertion  $\mathcal{A}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**14)** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  a tous ses coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

**15)** Préciser, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .

**16)** Donner, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression simple de  $c_n = P_n(i)$ , où  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

### Partie III.

Notons  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Ainsi  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en 0.

**17)** Quel est le sens de variation de  $F$  ?

**18)** Montrer que  $F(x)$  possède une limite  $\ell$  finie lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.

**19)** Prouver l'encadrement  $-1 \leq \ell \leq 0$ .

**20)** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de  $F$ , au point d'abscisse 0.

**21)** Expliciter le développement limité de  $F$  à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Nous noterons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$J(x) = \int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt, \quad K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt.$$

**22)** Prouver l'existence d'une constante  $A$  telle que  $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$  pour tout réel  $x$ .

**23)** Pour  $x \geq 1$ , placer les uns par rapport aux autres les réels 0,  $J(x)$  et  $K(x)$ .

**24)** Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrer que  $K(x) - 3L(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**25)** En découpant l'intervalle  $[1, x]$  sous la forme  $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$ , montrer que  $L(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**26)** En déduire un équivalent simple de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**27)** Exploiter les résultats des questions **17)**, **19)**, **20)** et **26)** pour donner l'allure de la courbe représentative de  $F$ .

— FIN —