Devoir surveillé n° 2 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 96 points.

Statistiques descriptives.

	Note brute	Note finale
Note maximale	68	18
Note minimale	12	6
Moyenne	$\approx 36,46$	$\approx 11,23$
Écart-type	$\approx 14,87$	$\approx 3,21$

I. Étude de quatre séries.

1.a. Soyez précis et complets dans vos réponses : $k^2 \times \dfrac{1}{k2^k} \longrightarrow 0$, c'est vrai, mais écrivez que c'est par croissances comparées. Donc R_n existe par comparaison, c'est vrai, mais écrivez que $\dfrac{1}{k2^k} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et que l'on conclut par comparaison à une série de Riemann (et c'est Riemann, pas Reimann ni riemann).

1.b. Beaucoup d'erreurs de calculs qui ont mené à des équivalents faux, du style $\dfrac{(2n)!}{n2^{n+1}(n!)^2}$ (l'exposant de la puissance de 2 est faux). Lisez bien l'énoncé pour donner le résultat attendu et pas un autre. Si vous arrivez à un mauvais résultat, vous devez vous en rendre compte. Il y a alors deux possibilités : soit vous laissez votre calcul au propre et vous indiquez que vous avez remarqué qu'il y a une erreur ; soit vous ne répondez pas à la question ! Laisser un résultat faux comme si c'était vrai ressemble à une tentative d'arnaque et est mal perçu.

1.c. La formule de Stirling fait partie de ce qui est demandé dans la question : il fallait l'encadrer.
Et bien évidemment, si on vous la demande, c'est qu'il fallait s'en servir dans la suite.

2.b. Avant d'écrire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n + b_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$, il faut s'assurer que les deux séries de droite convergent aussi, ce qui n'est pas automatique.

2.c. Si f_n est une fonction dépendant de n et que pour tout $t \in [0,1]$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors rien ne dit que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ce résultat est faux en général, on le verra dans le chapitre IV. En plus ici, t^{n+1} ne tend pas vers 0 si $t = 1$.

3.a. C'est une simple somme géométrique. Il est très dommage de ne pas le remarquer, et anormal de ne pas penser à vérifier que sa raison n'est pas égale à 1.
Vérifier que la valeur absolue de sa raison est strictement inférieure à 1 est correct, mais laisse une mauvaise impression : cette condition est utile pour savoir si la série converge, mais ne sert à rien pour donner la valeur de la somme partielle. Pour ce dernier points seul le fait que la raison ne vaut pas 1 est pertinent.

3.c. Quand vous effectuez une IPP, il faut le dire !!

4.c. L'énoncé était problématique car il demandait d'utiliser des intégrales impropres, que nous n'avions pas encore vues en cours. Certains ont très bien deviné qu'il fallait intégrer de $n+1$ à N et faire tendre N vers $+\infty$. Je n'ai pas sanctionné tous ceux qui ont directement utilisé l'écriture $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty}$, mais par contre il fallait justifier qu'il était possible de sommer le terme du milieu de l'encadrement jusqu'à $+\infty$: c'est le cours sur les séries.

4.d. Beaucoup d'incompréhension sur l'utilisation des ε. Si on a $(1-\varepsilon)\alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant (1+\varepsilon)\gamma_n$ avec $\alpha_n \sim \gamma_n$, on ne peut pas conclure directement que $\beta_n \sim \alpha_n$. Il faut montrer qu'à partir d'un certain rang on a $(1-\lambda\varepsilon) \leqslant \dfrac{\gamma_n}{\alpha_n} \leqslant (1+\mu\varepsilon)$, où λ et μ sont des constantes. La définition de limite « avec des ε » assure alors que $\dfrac{\gamma_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et là seulement on peut conclure. Lisez le corrigé, qui détaille tout cela.
Certains ne se sont pas embarrassés et ont carrément écrit $(1-\varepsilon)a_n \sim a_n$, c'est une horreur.

6. La notation $V_n << T_n$ n'existe pas. Si vous l'utilisez, vous devez la définir au préalable.

II. Une suite récurrente.

Je rappelle que les suites s'écrivent entre parenthèses : « (u_n) est croissante » et surtout pas « u_n est croissante ».

1. Comme toujours avec les exercices de suites récurrentes, il faut utiliser un intervalle stable par f. On peut bien sûr raisoner par récurrence et c'est plus long, moins élégant, et cela donne moins de résultats.
Ici, tout simplement, f est strictement croissante et $f(2) = 2$, donc $f(]2,+\infty[) \subset]2,+\infty[$. Comme $u_0 > 2$, on a fini.
Pour montrer que f est strictement croissante, ne vous jetez pas sur le calcul de la dérivée. Bien sûr ça marche, mais certains se sont trompés sur le calcul de la dérivée : dommage ... Observez plutôt que $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x-1}$, ce qui est une réécriture archi classique et très utile à connaitre pour les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. On peut alors conclure : $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est strictement décroissante, donc f est strictement croissante. Pas besoin de dériver. Et d'ailleurs, sous cette forme la dérivée est plus facile à calculer.
Le calcul des points fixes de f ne sert à rien dans cette question.

3. L'étude des points fixes fait apparaître le polynôme X^2-4X+4. Il est anormal de que vous ne pensiez pas à vérifier que c'est une identité remarquable. Ça doit être un réflexe.
Il est encore plus anormal d'écrire « $X^2 - 4X + 4$, $\Delta = 0$, donc $r = 2$ ». Qui sont Δ et r ? Ça n'a aucun sens !
Ces erreurs précises ont été faites dans le 1er DS, je vous l'ai fait remarquer, et je relis exactement les mêmes erreurs : c'est bien dommage.
Même chose pour l'oubli de l'hypothèse « f est continue » pour justifier que (u_n) converge vers un point fixe de f.

Et pour finir, noyons-nous allégrement dans ce puits de sagesse insondable :