Devoir surveillé n° 3 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 104 points (v1) et 96 points (v2).

Statistiques descriptives.

	Note brute v1	Note finale v1	Note brute v2	Note finale v2
Note maximale	73	19	80	20
Note minimale	19	6	26	6
Moyenne	≈ 48	$\approx 11,69$	$\approx 48,04$	$\approx 11,70$
Écart-type	$\approx 15,72$	$\approx 4,49$	$\approx 14,57$	$\approx 4,01$

I. Polynômes minimaux de matrices (v1).

1.b. Cette question, ainsi que toutes celles où il fallait déterminer un polynôme minimal, a été affreusement mal traitée. L'énoncé donne la définition de polynôme minimal, donc pour montrer qu'un polynôme est minimal, il faut vérifier tous les points de la définition. Le point (iii) n'a jamais été démontré correctement. Une toute petite poignée d'entre vous a pensé à dire quelque chose à son sujet, la grosse majorité l'a tout simplement ignoré. Ce n'est pas normal.
Beaucoup ont donné un polynôme de la forme $X - N - \mathrm{I}_3$, ce qui n'a absolument aucun sens. Soit vous donnez un polynôme, donc que des X, soit vous donnez une matrice, donc pas de X, mais vous ne pouvez pas mélanger les deux.

1.c. On demande dans ce genre de question de mener les calculs jusqu'au bout, et de donner la matrice sous forme d'un tableau.

3.a. La partie concernant $L_3(B)$à n'a pas toujours été bien comprise.

3.b. Même remarque, $L_3(B)$ n'a pas souvent été bien exploitée pour répondre à cet question.

II. Une intégrale égale à une somme (v1).

2.a. Question de cours mal connue, c'est dommage.

2.b. Certains ont cherché à calculer directement ces intégrales, et ont écrit les fractions $\dfrac{1}{\beta}$ ou $\dfrac{1}{\alpha^2 - \beta^2}$ sans même se demander si ces dénominateurs étaient nuls ou pas – et ils pouvaient l'être, ce qui obligeait à traiter des cas.

4. Il n'y avait rien à faire qu'à utiliser directement la partie A. Ne surtout pas refaire tous les calculs.

5. 0 est une borne de l'intervalle d'intégration, donc écrire directement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \frac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{x}}$ mérite une explication.

6.b « $\sin x$ est bornée » : quelle horreur, j'en ai marre de lire ça.

I. Réduction des matrices nilpotentes (v2).

2. et 3. C'étaient des questions d'un exercice à connaître des programmes de colle, et un bon nombre d'entre vous n'étaient pas au point.

7. Il fallait démontrer une équivalence (une implication a souvent été oubliée), et ne pas oublier les matrices nilpotentes d'indice 1.

9. et 11. Il fallait donner une base vérifiant des propriétés particulières. Vos réponses comptaient souvent sur des miracles : « on prend des vecteurs comme-ci comme-ça et c'est bon », mais peut-on prendre des vecteurs comme-ci comme-ça ? Il fallait tout justifier.
Une erreur souvent commise : si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, alors $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est nue base de $\mathrm{Ker}\, u$. C'est impossible car $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$, donc les vecteurs de cette dernière famille sont tous nuls.

10. et 12. Il fallait donner des matrices. Certains ont donné une expression des coefficients sans dessiner la matrice. C'était bien, mais on aime bien voir la matrice quand même, c'est plus parlant.
Pour ceux qui l'ont donnée, le dessin n'était pas toujours clair. Il faut donner suffisament de coefficients pour que les « petits points » puissent être complétés sans ambigüité.
Ne pas écrire au propre les « $u(e_1), \dots, u(e_n)$ » sous ou sur les colonnes de la matrice de u, et $e_1, \dots, e_n$ à droite des lignes. Je le fais en cours pour expliquer comment on contsruit la matrice mais ce n'est pas à mettre sur les copies.

13. Donner l'indice de nilpotence l de v, ce n'est pas seulement montrer que $v^l = 0$, c'est aussi justifier soigneusement que $v^{l-1} \neq 0$.

15. Pour utiliser la question 3, il fallait en vérifier toutes les hypothèses, ce qui demandait un minimum d'efforts.

16. La difficulté de cette questrion était tout à fait déraisonnable comparée aux autres questions. Il y avait un vrai déséquilibre. Cela dit, on pouvait au moins poser une hypothèse de récurrence correcte. Et « il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ tels que $E = \oplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ » n'en est pas une : l'énoncé ne dépend aps de p ! Il fallait poser « soit u d'indice de nilpotence p, alors il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ tels que $E = \oplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ ».

II. Exponentielle tronquée (v2).

1. Attention, il y avait une subtilité : T_n n'est pas une série exponentielle car n apparaît à la fois dans les bornes de la somme et dans l'exposant sous la somme. Donc on ne sait pas déterminer comme cela que (T_n) a une limite. Par contre, en considérant S la série définissant e^{nx}, R_n est le reste d'ordre n de S (mais là encore n intervient à deux endroits), et donc R_n est bien défini. Et $T_n + R_n = S$.

2. Pour utiliser la formule de Taylor, il faut d'abord en véifier les hypothèses (quelle surprise).

4. Pour obtenir $M < \mathrm{e}^{-1}$, on avait besoin de la stricte croissance de $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$, sinon on n'avait que $M \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.