Devoir surveillé n° 5 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 100 points (v1) et points (v2).

Statistiques descriptives.

	Note brute v1	Note finale v1	Note brute v2	Note finale v2
Note maximale	18	5	18	20
Note minimale	62	18	52	6
Moyenne	$\approx 34,94$	$\approx 10,01$	$\approx 32,36$	$\approx 11,91$
Écart-type	$\approx 12,13$	$\approx 3,58$	$\approx 7,69$	$\approx 3,17$

CCINP MP 2007 - 1ère épreuve (v1).

Ce sujet est un excellent sujet pour travailler les théorèmes d'interversion limite-intégrale. Il y a trois catégories d'élèves : ceux qui ne connaissent pas les énoncés, ceux qui les connaissent, et enfin ceux qui les connaissent et les appliquent correctement. Je vous laisse deviner à quelle catégorie appartiennent les élèves qui ont le mieux réussi.

1.a. Ne pas oublier l'intégrabilité en 0, si $x < 1$.

1.b. Quand vous effectuez une IPP sur un intervalle quelconque, n'oubliez pas de préciser « sous réserve de limite finie du crochet ».

2.b. « $R_n(x)\varepsilon \geqslant n \geqslant$ toto » est une analyse et n'est pas le sens demandé.

4.a. Le thérème de la double limite n'a rien à voir avec des intégrales. Il faut connaître son cours.

4.b.i. $|f_n - f|$ et $\|f_n - f\|_\infty$ ne sont pas la même chose : réflechissez-y.
Attention à l'ordre des quantificateurs dans la définition de convergence uniforme.

4.b.ii. Attention, I n'est pas forcément un segment.

6. L'intreversion somme-intégrale n'est que le second résultat de ce théorème. Le premier est déjà que $\sum \int f_n$ converge.

7. $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ n'est rien d'autre que la convergence simple. Pour la convergence uniforme, il faut majorer le reste indépendament de x.

8.b. Le théorème de d'Alembert n'est pas une équivalence. Que $\sum a_n$ converge absolument n'assure en rien que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a une limite strictement inférieure à 1, nous avons vu un contre-exemple en cours.
Dans le même ordre d'idée, que (a_n) soit bornée n'assure en rien que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ est bornée.

Mines-Ponts PC 2009 (v2).

2. Avant d'utiliser un sup, il faut justifier son existence.
La notation $\|f(x)\|_\infty$ n'a aucun sens. C'est $\|f\|_\infty$, ou $|f(x)|$.

3. Que d'erreurs dans le changement de variable. Revoyez le cours (et la rédaction).

4. Attention, il s'agissait ici de $\mathbb{C}$-ev, et il fallait donc prendre les coefficients dans $\mathbb{C}$.
Encore beaucoup de confusion entre « somme directe » et « supplémentaires », ça devient gênant en spé.
Ici $\dim \mathscr{C}^0 = +\infty$, pas question donc d'utiliser la caractérisation des hyperplans par la dimension.
Vérifier que $H^0 \cap D = \{0\}$ et ensuite faire une analyse est redondant : l'analyse prouve la somme directe.

5. Beaucoup d'oublis du facteur 2 dans l'exposant de $e_k(x) = \mathrm{e}^{i2k\pi}$.
Attention, dans le calcul de $P(e_k)$ pour $k \neq 0$ il y a une division par k. Il faut donc traiter le cas $k = 0$ à part pour ne pas diviser par zéro.

6. C'était un excellent réflexe de penser au cours sur les produits scalaires, car on veut en effet montrer ici que les e_k forment une famille orthogonale. Problème : $\varphi(g, f) = \overline{\varphi(f, g)}$, donc φ n'est pas un produit scalaire ... mais presque. C'est un produit scalaire complexe, dit hermitien, pour lequel il y a aussi une notion de famille orthogonale, et des résultats très semblables à ceux sur les produits scalaires.

10. $m_\alpha(Tf)$ est un sup, il faut justifier son existence avant de faire des calculs avec. Et surtout éviter de faire des calculs sur des sup d'ensembles. Faites d'abord les calculs sur les ensembles, et seulement à la fin passer au sup.

13. Il n'y a pas de linéarité « infinie ». Autrement dit $T\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ n'a aucune raison d'être égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} T(u_n)$.
Un vecteur propre doit être non nul, il faut le vérifier.

15. Attention, T n'est pas égal à T_α. T_α n'est définie que sur $\mathscr{C}^\alpha$, donc dire que H^0 est stable par T_α n'a pas de sens puisque $H^0 \not\subset \mathscr{C}^\alpha$.

16. L'énoncé demande bien de montrer le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc il faut commencer la récurrence à 0.