Devoir surveillé n° 6 - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 96 points (v1) et 104 points (v2).

Statistiques descriptives.

	Note brute v1	Note finale v1	Note brute v2	Note finale v2
Note maximale	23	19	58	20
Note minimale	77	7	13	7
Moyenne	$\approx 38,70$	$\approx 10,40$	$\approx 29,59$	$\approx 11,74$
Écart-type	$\approx 15,78$	$\approx 3,51$	$\approx 9,62$	$\approx 2,76$

CCINP PSI 2011 - 1ère épreuve (v1).

2. Beaucoup d'erreurs et de naïveté sur cette question. Sur le bord du disque de convergence, nous n'avns aucun résultat au programme. À vous de vous adapter aux différents cas. En tout cas, la convergence normale n'a lieu que sur tout segement de l'intervalle **<u>ouvert</u>** de convergence. Cela permet d'obtenir la continuité sur $]-1,1[$, mais sûrement pas en 1.

4. Il fallait remarquer la somme de Riemann : la mise en facteur de $\dfrac{1}{p}$ à la question précédente et l'indication de la fonction à considérer y faisaient lourdement penser. Fait exceptionnel, il s'agissait d'une somme de Riemann sur $[0,2]$, et ça doit être la 1ère fois que je croise une somme de Riemann que ne se fait pas sur $[0,1]$.

6. Mais zut à la fin : comment est-il encore possible en fin de spé de ne pas vérifier que la raison d'une série géométrique ne vaut pas 1 avant d'appliquer la formule ? ? ? ? Scandaleux et désespérant.

7. La seule chose à montrer dans cette question était la classe $\mathscr{C}^1$. On attendait donc autre chose que « par opérations ». Il fallait revenir à la définition : une fonction à valeurs complexes est $\mathscr{C}^1$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont.
Ceux qui n'avaient pas pensé à vérifier à la question précédente que le dénominateur $\mathrm{e}^{it}-1$ ne s'annulait pas l'ont souvent fait ici. C'est mieux que rien, mais lire « $\mathrm{e}^{it} \in]-1,1[$ » fait vraiment mal.

9. Beaucoup d'appels à la convergence uniforme, à la double limite etc. Il est vrai que nous avons surtout étudié des intégrales généralisées en spé, mais quand vous tombez sur une simple intégrale sur un **segment** d'une somme **finie** de fonctions **continues**, il n'y a rien faire, tout fonctionne facilement sans théorème ! Et pendant ce temps les shadoks pompaient ...
Ne pas oublier que si $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{ik\pi} = (-1)^k$.

15. Attention à ne pas donner une limite qui dépend de x quand $x \to +\infty$, cela n'a aucun sens.
Beaucoup de comparaisons de complexes. Ici f était à valeurs complexes, donc $f(x) \leqslant M$ n'a pas de sens.

Mines-Ponts PSI 2022 - Maths 1 (v2).

1. La première partie de la question porte sur une série entière complexe. Dans la seconde partie, on se restreint à $]-1,1[$, pour reconnaître le DSE de ln. Attention : le logarithme d'un complexe n'existe pas !

5. La notion de produit infini n'est pas au programme, donc l'écriture $\prod_{n=1}^{+\infty}$ n'existe pas pour nous.

Pour intervertir exp et lim, il faut utiliser la continuité de la fonction exp. Idem avec ln.

La formule $\ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty} a_k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(a_k)$ n'est pas connue, il faut repasser par des sommes partielles.

6. Pour montrer qu'une fonction est continue par morceaux, il faut vérifier qu'elle admet des limites finies à gauche et à droite de chaque point de la subdivision.
Attention, $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ si $x \in \mathbb{Z}$, et $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ sinon.

9. Problème vu en classe : $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x h(u)\,\mathrm{d}u$ avec x **réel**, mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^n h(u)\,\mathrm{d}u$ avec n **entier**.

10. L'interversion $\sum/\int$ pour une série entière n'est valable que pour une intégrale sur un segment inclus dans l'intervalle de convergence, pas pour une intégrale généralisée.
Il fallait ici utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

11. Beaucoup d'erreurs avec les parties entières : $x - \lfloor x \rfloor$ ne tend pas vers 0 quand $x \to +\infty$!!

12. Des problèmes dans l'utilisation du théorème de convergence dominée à paramètre continu.
Pour avoir la continuité en 0, on ne peut passer par une domination sur tout segment, car 0 est une borne de l'intervalle à étudier.

13. Pour avoir $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$, il faut que f soit de signe constant sur $[a,b]$. Donc ici il fallait commencer par vérifier que q était de signe constant sur $[k/2,(k+1)/2]$.
Pour utiliser le CSSA (ou tout autre théorème), il faut en **vérifier les hypothèses** !!

18. Les coefficients $a_{n,N}$ sont des constantes, elles ne peuvent pas dépendre de z.