Devoir surveillé n° 7 (1ère épreuve du concours blanc) - Remarques

Barème.

Toutes les questions sont notées sur 4 points, le total est de 124 points (v1) et 196 points (v2).

Statistiques descriptives.

	Note brute v1	Note finale v1	Note brute v2	Note finale v2
Note maximale	50	11	116	20
Note minimale	40	8	19	7
Moyenne	$\approx 45,33$	$\approx 9,6$	$\approx 46,59$	$\approx 10,64$
Écart-type	$\approx 5,03$	$\approx 1,51$	$\approx 20,08$	$\approx 2,63$

Remarques générales.

Les copies sont en général bien numérotées mais n'oubliez pas de mentionner le nombre total de copies, et de remplir les en-têtes de toutes les copies.
Quasiment tous les résultats sont encadrés, et vous avez vraiment très peu utilisé de blanc correcteur : **bravo** ! C'est une énorme amélioration depuis le début de l'année.

Centrale PSI 2015, maths 1 (v2).

I.A Une bonne partie des questions de cette section sont archi-classiques, et pourtant elles ont été mal traitées. Parmi les erreurs qui reviennent tout le temps :

- « f est croissante » n'a rien à voir avec « $f(x) \geqslant x$ ».
- si u_n tend vers ℓ, ℓ est un point fixe de f car f est **continue**.
- si x est une solution de $f(x) = x$, il n'y a aucune raison pour que $f'(x) = 1$. Considérer $x = 1$ et $\sqrt{x} = x$.
- si f a un point fixe, il n'y a aucune raison que ce soit la limite de (u_n), ne serait-ce que parce qu'il y a peut y avoir d'autres points fixes.
- s'il y a plusieurs points fixes, « (u_n) tend vers le **premier** point fixe » n'a aucun sens et ne repose sur aucun résultat du cours.

Et de manière générale, la notion d'**intervalle stable** est sous-utilisée : elle permet pourtant de démontrer tellement de résultats tellement rapidement !

I.A.2 Comme je l'ai souvent dit, dès qu'il s'agit de montrer qu'il existe **un plus petit élément** tel que $\ldots$, il faut introduire un ensemble idoine et montrer qu'il a un minimum. Ici l'ensemble à considérer est un ensemble de réels. On ne peut donc pas montrer directement qu'il a un minimum. Il faut commencer par montrer qu'il a une borne inf grâce au théorème de la borne inf (dont les hypothèses ne sont pas toujours bien connues, ce qui est assez hallucinant), et ensuite que cette borne inf appartient à l'ensemble en question, ce qui en fait un minimum.

II.A.1 Si vous utilisez le produit de Cauchy, il faut en vérifier les hypothèses avant tout (étonnant, non ?). Ne vous contentez pas de préciser que X et Y sont indépendantes : rajoutez clairement qu'on en déduit que t^X et t^Y le sont aussi (et ce n'est pas le lemme des coalitions).

II.A.3 Vous manipulez les séries doubles et familles sommables comme par magie, comme si on avait le droit de tout faire sans rien justifier : est-ce que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$? En général non, il faut vérifier que les deux séries du membre de droite convergent. Est-ce que $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}$? En général non, il faut vérifier que la famille est sommable. Ici il suffisait de préciser que tous les termes étaient réels positifs.

II.A.5 Pour montrer que $R_K \to 0$, il faut justifier que $\sum P(T = k)$ converge.
La question précédente montrait l'égalité voulue sur $[0, 1[$, mais on la voulait sur $[-1, 1]$.

II.B Avant d'écrire $G'_T(G_X(1))$, il faut s'assurer que cete série converge !

III.A.1 et 2 Il s'agissait d'utiliser les résultats de la partie II, et ça allait très vite. Mais devinez quoi ? Avant d'utiliser ces résultats, il fallait **vérifier les hypothèses**.

III.A.3.a Utiliser le théorème de continuité croissante, et éviter le blabla qui ne veut rien dire.

III.A.3.b L'énoncé vous demande explicitement de vérifier les hypothèses, et pourtant peu sont ceux qui n'en oublient pas en route.

III.B.I Une espérance est une somme. On ne demandait pas de montrer que T prenait des valeurs finies, mais que son espérance était finie.

III.B.2.b C'était une question de cours, mal sue. En particulier, avant de couper une série en deux, on doit s'assurer que les deux termes convergent (cf. point II.A.3). Il était plus prudent et efficace de passer par des sommes partielles.

III.C.1 Encore la continuité croissante.

III.C.2.a Continuité décroissante cette fois-ci.

III.C.2.c Il y avait deux variables : n et k. On ne peut pas faire tendre les deux vers l'infini en une seule fois, il fallait jouer sur l'une puis sur l'autre, avec des ε.

III.C.3.b Ne pas oublier l'hypothèse de continuité de f pour pouvoir passer à la limite.

IV Quand vous écrivez f^n, s'agit-il de $f \times f \times \ldots \times f$, ou de $f \circ f \circ \ldots \circ f$? Beaucoup de confusion et d'erreurs sur ce point.