Feuille d'exercice n° 00 : **TD de rentrée**

Exercice 1 Étudier (ensemble de définition, ensemble de dérivabilité, dérivée, tableau de variation, courbe représentative) la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, et en donner une expression plus simple.

Exercice 2 On introduit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1,0[\cup]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}. \end{array} \right.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0. Quelle est la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0 ?

Exercice 3 On pose $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t\mathrm{d}t}{2+\sin t}$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}$.

1) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x+b}{a}$.

2) En utilisant le changement de variable $u = \pi - t$, trouver une relation simple entre I et J.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}$.

a) En utilisant la formule de trigonométrie exprimant $\sin t$ en fonction de $\cos(t/2)$ et $\sin(t/2)$, **démontrer** la formule exprimant $\sin t$ en fonction de $\tan(t/2)$.

b) En utilisant le changement de variable $\theta = \tan\dfrac{t}{2}$, montrer que pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^2+\theta+1}$.

c) Calculer $F(x)$.

4) En déduire la valeur de J, puis celle de I.

5) Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t} = \int_{-\pi}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}$.

6) Calculer l'intégrale $F(2\pi) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}$.