Feuille d'exercice n° 01 : **Séries numériques – Corrigé**

II. Séries à termes réels positifs

Pour l'exercice **13** on utilise dans la dernière question le résultat de la question **2.b.** du DM n° 1.

Exercice 13

1) L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par Arctan, donc pour tout n, $0 < u_n$. Par IAF, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \operatorname{Arctan} x \leqslant x$, donc $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$. En multipliant cette relation par 2^{n+1}, on obtient que (v_n) est décroissante et strictement positive. Elle converge donc

2) À partir de la relation $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$, et par récurrence, il vient $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0|$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puisqu'en 0 $\operatorname{Arctan} t = t - \dfrac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)$, on obtient $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n\left(1 - \dfrac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)$ puis $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} = \dfrac{4}{u_n^2}\left(1 + \dfrac{2u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)$, donc $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{4}{u_n^2} \sim \dfrac{8}{3}$.

3) En multipliant la relation précédente par $\dfrac{1}{4^{n+1}}$, il vient $\dfrac{1}{v_{n+1}^2} - \dfrac{1}{v_n^2} \sim \dfrac{2}{3.4^n}$.

La série de terme général $\dfrac{2}{3.4^n}$ converge, donc par sommation téléscopique, la suite $\dfrac{1}{v_n^2}$ converge, ce qui prouve que $\lambda > 0$.

4) On applique le théorème de sommation des relations de comparaison : quand $N \to +\infty$, $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2} \sim \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{2}{3.4^n}$, ce qui donne $\dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{v_N^2} \sim \dfrac{8}{9.4^N}$, donc $v_N^2 = \lambda^2\left(1 + \dfrac{8\lambda^2}{9.4^N} + o\left(\dfrac{1}{4^N}\right)\right)$, et enfin $u_n = \dfrac{\lambda}{2^n} + \dfrac{\lambda^3}{9.2^{3n-2}} + o\left(\dfrac{1}{2^{3n}}\right)$.

Exercice 16 $A_n = a + \dfrac{b(n+1)}{2}, \ln B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(a+bk)$.

Posons $f(t) = \ln(a+bt)$ fonction croissante.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = n\ln(a+bn) - n + o(n)$

donc $\ln\dfrac{B_n}{A_n} = \ln B_n - \ln A_n = \ln\left(\dfrac{a+bn}{a+bn/2}\right) - 1 + o(1) \to \ln 2 - 1$ d'où $\dfrac{B_n}{A_n} \to \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

III. Séries à termes quelconques

Exercice 19

1) On a $\dfrac{n-2}{2^n-1} \sim \dfrac{n}{2^n}$ et, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n}{2^n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n}{2^{n-1}}$. On reconnaît la dérivée première de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^{n-1}}$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-2}{2^n-1}$ converge.

2) Cette série n'est pas à termes positifs : on étudie sa convergence absolue. Pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge absolument, donc converge.

3) On a, pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{n}} - 1$. Ainsi, $\sqrt[n]{2} - 1 \sim \dfrac{\ln(2)}{n}$. De plus, $2n+3 \sim 2n$ et donc $\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3} \sim \dfrac{\ln(2)}{2} \times \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$ converge.

4) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ converge vers 1 donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n+1}$ diverge grossièrement.

5) Cette série n'est pas à termes positifs : on étudie sa convergence absolue. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, $\left|\dfrac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}\right| = \dfrac{|\cos n!|}{n^3+\cos n!} \leqslant \dfrac{1}{n^3-1}$. Or, $\dfrac{1}{n^3-1} \sim \dfrac{1}{n^3}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 3). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3-1}$ converge et donc, toujours par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$ converge absolument, donc converge.

6) Si $\alpha \geqslant 0$, $(\ln(1+n^\alpha))$ converge vers $\ln(2)$ ou diverge vers $+\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+n^\alpha)$ diverge grossièrement. Si $\alpha < 0$, $(\ln(1+n^\alpha))$ converge vers 0 et donc $\ln(1+n^\alpha) \sim n^\alpha$. Or, d'après les résultats sur les séries de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha$ converge si $\alpha < -1$ et diverge si $-1 \leqslant \alpha < 0$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+n^\alpha)$ converge si $\alpha < -1$ et diverge si $-1 \leqslant \alpha < 0$.

Exercice 20

1) Par croissances comparées, $2n(n+1) = o(2^n)$ et donc $\dfrac{2n(n+1)}{3^n} = o\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge (c'est la série géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$), par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n(n+1)}{3^n}$ converge.

On a ensuite, pour tout entier naturel n,

$$\frac{2n(n+1)}{3^n} = \frac{2}{9} \times \frac{n(n-1)}{3^{n-2}} + \frac{4}{3} \times \frac{n}{3^{n-1}} .$$

On reconnaît les termes généraux des deux premières dérivées de la série géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$, qui sont des séries convergentes. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k(k+1)}{3^k} &= \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{2}{\left(\frac{8}{27}\right)} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)} = \boxed{\frac{9}{2}} .\end{aligned}$$

2) On a, par croissances comparées, $n^2(n^2+n+1) = o(n!)$ et donc $\dfrac{n^2+n+1}{n!} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$ converge.

On a, pour tout entier naturel n,

$$\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + 2\frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} .$$

Comme précédemment, les trois séries correspondant aux trois termes du membre de droite convergent et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2+k+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!}+2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-2)!}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\\
[{\color{red}k}=k-2,\ {\color{blue}k}=k-1] &= \sum_{{\color{red}k}=0}^{+\infty}\frac{1}{{\color{red}k}!}+2\sum_{{\color{blue}k}=0}^{+\infty}\frac{1}{{\color{blue}k}!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\\
&= \boxed{4e}\ .
\end{aligned}$$

3) On a, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right) &= \ln\left(1+\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}-1\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{n^3-(n+2)(n-1)^2}{(n+2)(n-1)^2}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{n^3-(n+2)(n^2-2n+1)}{(n+2)(n-1)^2}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{n^3-[n^3-2n^2+n+2n^2-4n+2]}{(n+2)(n-1)^2}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{3n-2}{(n+2)(n-1)^2}\right)\ .
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{3n-2}{(n+2)(n-1)^2}\sim\dfrac{3}{n^2}$ et donc $\ln\left(\dfrac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)\sim\dfrac{3}{n^2}$. Or, la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 0}\ln\left(\dfrac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$ converge.

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 3, on étudie la somme partielle d'ordre n de cette série :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right) &= \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right)\\
&= \ln\left[\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k+2}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}\right)^2\right]\ .
\end{aligned}$$

On a, en argument du logarithme du membre de droite, des produits télescopiques. On peut se ramener à des sommes télescopiques ou bien montrer, par récurrence (on trouve les formules en amont par un petit schéma), que, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$,

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k+2}=\frac{6}{(n+1)(n+2)}\ \text{et}\ \prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1}=n\ .$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n\geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^3}{(k+2)(k-1)^2}\right) &= \ln\left(\frac{6n^2}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&= \ln(6)+\ln\left(\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right)\ .
\end{aligned}$$

La somme recherchée est donc $\boxed{\ln(6)}$, car le second terme du membre de droite converge vers 0.

4) Soit n un entier naturel. Si $0\leqslant n\leqslant k-1$, alors $\dfrac{\binom{n}{k}}{n!}=0$. Si $n\geqslant k$, on a

$$\frac{\binom{n}{k}}{n!}=\frac{1}{k!}\times\frac{1}{(n-k)!}\ .$$

À un décalage d'indices près, on reconnaît les termes généraux de la série exponentielle de paramètre 1 : cette série converge. On a ensuite, en posant ${\color{red}n}=n-k$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{n}{k}}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}=\frac{1}{k!}\sum_{{\color{red}n}=0}^{+\infty}\frac{1}{{\color{red}n}!}=\boxed{\frac{e}{k!}}\ .$$

5) On a $\left|\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right| = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (c'est la série de Riemann de paramètre 2). Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$, on peut exprimer la somme partielle d'ordre n de cette série :

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)$$
$$= \ln\left[\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\right] .$$

On a, en argument du logarithme du membre de droite, des produits télescopiques. On peut se ramener à des sommes télescopiques ou bien montrer, par récurrence (on trouve les formules en amont par un petit schéma), que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \text{ et } \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2} .$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) .$$

La somme recherchée est donc $\boxed{-\ln(2)}$, car le second terme du membre de droite converge vers 0.

6) La série étudiée ici n'est pas à termes positifs : on étudie donc sa convergence absolue. Pour tout entier naturel n, $\left|\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)\right| = -\ln\left(1+\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)-1\right) \sim \dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{1}{2^{2n}}$. On reconnaît ici la série géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$, qui converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$ converge absolument, donc converge.

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$, on peut exprimer la somme partielle d'ordre n de cette série. On va, pour cela, utiliser une formule de duplication :

$$\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) = \sin\left(2\times\frac{a}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)\\ &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{\sin(2a)}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right) - \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) .\end{aligned}$$

La somme recherchée est donc $\boxed{\ln\left(\dfrac{\sin(2a)}{2a}\right)}$, car le second terme du membre de droite converge vers 0.

Exercice 21 $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 22 En développant et après simplification, $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$ donc $u_n = -\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$. Puisque $|2-\sqrt{3}| < 1, u_n \sim -(2-\sqrt{3})^n\pi$ est terme général d'une série absolument convergente..

Exercice 25 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m}\right) = \frac{9}{4}$ via produit de Cauchy.