Feuille d'exercice n° 01 : **Séries numériques**

I. Révisions sur les suites (✎)

Exercice 1 Classer par ordre de prépondérance (avec la relation o) les suites de termes généraux :

1) $(\ln n)^3$
2) $\ln\left(n^3\right)$
3) $\dfrac{3^n}{n^3}$
4) 2^n
5) $\mathrm{e}^{n/2}$
6) $(\ln(\ln n))^n$
7) $n^{\ln(\ln n)}$
8) $\dfrac{n}{\ln n}$

Exercice 2 Classer par ordre de prépondérance (avec la relation o) les suites de termes généraux :

1) $\dfrac{1}{n^4}$
2) $\dfrac{\ln n}{n^5}$
3) $\dfrac{2^n}{1+3^n}$
4) $2^{-\ln(\ln n)}$
5) $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n+n}$
6) $\dfrac{\ln n}{2^n+n^2}$
7) $\dfrac{\tan(1/n)}{1+\cos^3(1/n)}$
8) $(\cos(1/n))^{\sin(1/n)}-1$

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=1+\sqrt{u_n}$. Montrer que cette suite est toujours définie, et donner sa nature. Déterminer sa limite si elle existe.

Exercice 4 (▲)

1) Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{x}=x^n$ admet deux racines positives $u_n<v_n$, pour n assez grand.
2) Montrer que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4) Trouver sa limite ℓ, montrer que $n(u_n-\ell)$ tend vers 1.

Exercice 5 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=u_n+\frac{2}{u_n}$. En utilisant $v_n=\frac{u_n^2}{4}$, donner un équivalent de u_n. *Indication* : on montrera que $\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1}-v_n=1$, on en déduira un équivalent de v_n puis de u_n.

II. Séries à termes réels positifs

Exercice 6 (✎) Nature des séries de termes généraux suivants.

1) $\dfrac{-n^2+1}{n!2^n}$
2) $\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln n}\right)$
3) $a^{\sqrt{n}}$
4) $\cos\left(\arctan n+\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 7 (✎) Déterminer la nature des séries de terme général (avec $\alpha\in\mathbb{R}$) :

1) $\dfrac{2^n n}{n!}$
2) $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$
3) $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$
4) $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k,\ \alpha\in\mathbb{R}$
(*indication :* grâce à un encadrement, trouver un équivalent de u_n).

Exercice 8 Déterminer la nature des séries de terme général :

1) $\dfrac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(na)}$, $a \in \mathbb{R}$

2) $\dfrac{(n!)^k}{(kn)!}$, $k \in \mathbb{N}^\star$.

3) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$

- **a)** Montrer que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- **b)** Trouver un équivalent de $\ln(u_n)$.
- **c)** Que dire de la convergence de $\ln(n^2 u_n)$? Conclure.

Exercice 9 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)$ avec $x > 0$.

Exercice 10 **Règle de Raab-Duhamel :**

1) Soit (u_n) une série à termes > 0 telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{1 + a/n + O(1/n^2)}$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(n^a u_n)$, ainsi que la série de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$.

- **a)** Donner un DL de w_n en $O(1/n^2)$.
- **b)** Quelle est la nature de la série $\sum w_n$?
- **c)** En déduire que la suite (v_n) converge, et que la suite $\exp(v_n)$ converge vers une limite strictement positive.
- **d)** Montrer alors qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^a}$.
- **e)** Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

2) Application :

Soient a et b deux réels positifs tels que $(b-a) > 1$. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

- **a)** Donner la nature de la série de terme général u_n en appliquant la règle de Raab-Duhamel.
- **b)** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 11 On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.

2) Déterminer la limite de (u_n).

3)
- **a)** Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_{n+1} - u_n)$.
- **b)** Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3.

4) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

5)
- **a)** Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$.
- **b)** En déduire la nature de la série de terme général u_n^2.

Exercice 12 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $\sum b_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n + b_n$. Montrer que (a_n) converge.

Exercice 13 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \operatorname{Arctan} u_n$.

1) Pour tout n, on pose $v_n = 2^n u_n$. Montrer que la suite (v_n) converge. On notera λ sa limite.

2) Donner un équivalent de $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{4}{u_n^2}$.

3) Montrer que $\lambda > 0$.

4) Donner un développement asymptotique de u_n à deux termes.

Exercice 14 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $v_n = a^{u_n}$. Déterminer la nature de la série de terme général v_n.

Exercice 15 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 16 Soit $a > 0, b > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a+bk)$, $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (a+bk)^{1/n}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\infty} \frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e.

III. Séries à termes quelconques

Exercice 17 Si $q \in \mathbb{R}$, on appelle

- première dérivée de la série géométrique de raison q la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n q^{n-1}$;
- deuxième dérivée de la série géométrique de raison q la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} n(n-1) q^{n-2}$.

Étudier la nature de chacune de ces séries et, dans les cas de convergence, déterminer leurs sommes.

Exercice 18 Montrer la convergence et calculer la somme de :

1) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-2n} \operatorname{ch} n$

2) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

4) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$

5) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

6) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{n^2+n+2}{n!}$

7) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$ où $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 19 Déterminer la nature des séries suivantes, dont on donne les termes généraux.

1) $\dfrac{n-2}{2^n - 1}$

2) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{2} - 1}{2n+3}$

4) $\dfrac{n}{n+1}$

5) $\dfrac{\cos(n!)}{n^3 + \cos(n!)}$

6) $\ln(1 + n^\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 20 Montrer la convergence puis calculer la somme des séries suivantes, dont on donne les termes généraux.

1) $\dfrac{2n(n+1)}{3^n}$

2) $\dfrac{n^2+n+1}{n!}$

3) $\dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$ fixé.

4) $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

5) $\ln\left(\dfrac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$

6) $\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$, $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 21 () Convergence de la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Exercice 22 Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$$

puis en déduire celle de la série de terme général

$$v_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right).$$

Exercice 23 On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n}$. Cette série est-elle absolument convergente ? Semi-convergente ?

Exercice 24 Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

2) Montrer la divergence de la série produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 25 Existence et calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$$

(*On pourra écrire* 3^{-n} *comme une somme de la forme* $\sum_{k=0}^{n} \ldots$ *et faire apparaître un produit de Cauchy.*)