Feuille d'exercice n° 02 : Rappels et compléments d'algèbre linéaire – Corrigé

I. Familles de vecteurs et sous-espaces vectoriels

II. Applications linéaires

Exercice 3

1) $\boxed{\text{Cette assertion est fausse}}$. Par exemple, si u est la fonction identiquement nulle (qui est bien un endomorphisme), alors $(u(e_1)\dots u(e_p))$ contient forcément le vecteur nul, et est donc liée.
Supposons u injective. Soient $\lambda_1\dots\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u(e_1)+\ldots+\lambda_p u(e_p) = 0$. On a donc, u étant linéaire, $u(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p)=0$, et puisque u est injective, on en tire $\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p = 0$. Mais la famille $(e_1,\ldots,e_p)$ est libre, et donc $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$, et ainsi
$\boxed{\text{la famille } (u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_p)) \text{ est libre}}$.

2) $\boxed{\text{Cette assertion est vraie}}$. En effet, soient $\lambda_1\dots\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p = 0$. On a donc $u(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p)=0$, et u étant linéaire, $\lambda_1 u(e_1)+\ldots+\lambda_p u(e_p)=0$. Mais la famille $(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_p))$ est libre, et donc $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$, et ainsi
$\boxed{\text{la famille } (e_1,\ldots,e_p) \text{ est libre}}$.

3) $\boxed{\text{Cette assertion est fausse}}$. Par exemple, si u est la fonction identiquement nulle, alors $(u(e_1)\dots u(e_p))$ ne contient que le vecteur nul, d'où $\text{Vect}(u(e_1)\dots u(e_p))=\{0\}$, et si $E\neq\{0\}$, $(u(e_1)\dots u(e_p))$ n'est pas génératrice.
Supposons u surjective. Soit $y\in E$. Alors il existe $x\in E$ tel que $y=u(x)$. Or $(e_1,\ldots,e_p)$ est génératrice, et il existe $\lambda_1\dots\lambda_p\in\mathbb{K}$ tels que $x=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p$, d'où $y=u(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p)=\lambda_1 u(e_1)+\ldots+\lambda_p u(e_p)$, et ainsi $\boxed{\text{la famille } (u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_p)) \text{ est génératrice}}$.

4) $\boxed{\text{Cette assertion est vraie}}$. Mais on ne pourra la démontrer facilement qu'un peu plus tard dans l'année. En effet, le fait que $(u(e_1),u(e_2),\ldots,u(e_p))$ est génératrice implique que u est surjective, et que E est de dimension finie, dans ces conditions, un théorème assure que u est aussi injective.
Supposons u injective. Soit $x\in E$. Alors $u(x)\in E$, donc il existe $\lambda_1\dots\lambda_p\in\mathbb{K}$ tels que $u(x)=\lambda_1 u(e_1)+\ldots+\lambda_p u(e_p) = u(\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p)$. Par injectivité de u, on a $x=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_p e_p$, et ainsi $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2,\ldots,e_p) \text{ est génératrice}}$.

Exercice 5 Si $\dim E \leqslant 2$, toute $f\in\mathscr{L}(E)$ est solution.
Sinon, soit f une solution. Pour tout x non colinéaire à u il existe donc $a_x, b_x\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=a_x u+b_x x$.
Soit $x,x'\in E$ tels que (u,x,x') soit libre. L'égalité $f(x+x')=f(x)+f(x')$ donne $(a_{x+x'}-a_x-a_{x'})u+(b_{x+x'}-b_x)x+(b_{x+x'}-b_{x'})x'=0$. Par liberté de (u,x,x'), $b_{x+x'}=b_x=b_{x'}$ et $a_{x+x'}=a_x+a_{x'}$.
Il existe donc $b\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in E$ non colinéaire à u, $b_x=b$ (ce qui prouve l'unicité de b_x).
Soit x non colinéaire à u. Alors $(u+x)$ ne l'est pas non plus donc $f(u+x)=a_{u+x}u+b\times(u+x)$. Mais aussi $f(u+x)=f(u)+f(x)=f(u)+a_x u+bx$, donc $f(u)=(a_{u+x}-a_x)u+bu$. Donc finalement, le résultat : il existe $a_x, b\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=a_x u+bx$ est valable pour tout $x\in E$.
Donc $a_x u = f(x)-bx$, ce qui prouve donc aussi l'unicité de a_x.
On peut donc considérer la fonction $a : x\mapsto a_x$, et on montra facilement qu'elle est linéaire.
La synthèse ne pose pas de problème.

Exercice 9

1) Commençons par vérifier que pour tout $x\in F$, $q(x)=x$: Soit $x\in F$. Par stabilité, pour tout $l\in\mathbb{N}$, $u^l(x)\in F$, et donc $p\circ u^l(x)=u^l(x)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} u^j\circ p\circ u^{k-j}(x) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} u^j\circ u^{k-j}(x) \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} u^k(x) = u^k(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Or $q(x)\in\operatorname{Im} q$, donc $x\in\operatorname{Im} q$ et il vient $F\subset\operatorname{Im} q$.
Ensuite, montrons que $\operatorname{Im} q\subset F$: Soit $x\in\operatorname{Im} q$. Il existe alors $t\in E$ tel

que $x=q(t)=\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}u^j\circ p\circ u^{k-j}(t)$. Or pour tout j, $p\circ u^{k-j}(t)\in F$, donc par stabilité, $u^j\circ p\circ u^{k-j}(t)\in F$. Par combinaison linéaire, $q(t)\in F$.
Donc avec la première inclusion, $\operatorname{Im} q=F$.
Enfin, soit $x\in E$: $q(x)\in\operatorname{Im} q$ donc $q(x)\in F$, et alors avec le tout premier point, $q\circ q(x)=q(x)$.
Finalement $q\circ q=q$ et q est bien un projecteur.

2) Montrons que $u\circ q=q\circ u$: Soit $x\in E$. Alors

$$\begin{aligned}
u\circ q(x)&=u\left(\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}u^j\circ p\circ u^{k-j}(x)\right)\\
&=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}u^{j+1}\circ p\circ u^{k-j}(x)\\
&=\frac{1}{k}\left[u^k\circ p\circ u(x)+\sum_{j=0}^{k-2}u^{j+1}\circ p\circ u^{k-j}(x)\right]\\
&=\frac{1}{k}\left[p\circ u(x)+\sum_{j=1}^{k-1}u^{j}\circ p\circ u^{k-j+1}(x)\right]\\
&=\frac{1}{k}\left[p\circ u(x)+\sum_{j=1}^{k-1}u^{j}\circ p\circ u^{k-j}(u(x))\right]\\
&=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}u^{j}\circ p\circ u^{k-j}(u(x))\\
&=q\circ u(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\operatorname{Ker} q$ est stable par u, et c'est un supplémentaire de F puisque $F=\operatorname{Im} q$ et q est un projecteur.

Exercice 10

1) On va commencer par montrer que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Im} p_i$ est directe. Soit $(y_1,\dots,y_n)$ dans $\operatorname{Im} p_1\times\cdots\times\operatorname{Im} p_n$. On suppose que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}y_j=0$. La condition $p_i\circ p_j=0$ pour tout $i\neq j$ montre que $p_i(y_j)=0$ pour tout $i\neq j$. Soit alors i dans $[\![1,n]\!]$. De $p_i\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}y_j\right)=0$ on déduit $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}p_i(y_j)=p_i(y_i)=y_i=0$. 0n en conclut que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Im} p_i$ est directe. Montrons alors que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Im} p_i=E$. Soit i dans $[\![1,n]\!]$. Par hypothèse $p_i\neq 0$, et on a donc $\dim\operatorname{Im} p_i\geqslant 1$. Comme $\dim\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Im} p_i=\sum_{i=1}^{m}\dim\operatorname{Im} p_i$, on en déduit que $\dim\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Im} p_i\geqslant m$. Or on a supposé $m=n$, donc $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Im} p_i$ est un sous-espace vectoriel de E, de dimension supérieure ou égale à $\dim E$. Il en résulte que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Im} p_i=E$.

2) Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_i=0$. Soit j dans $[\![1,n]\!]$. On a alors $p_j\circ\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ip_j\circ p_i=0$. Comme par hypothèse $i\neq j$ entraîne $p_j\circ p_i=0$, on en déduit $\lambda_jp_j^2=\lambda_jp_j=0$. Comme p_j est un projecteur non nul, il en résulte que $\lambda_j=0$. On a ainsi montré que la famille $(p_1,p_2,\dots,p_m)$ est libre.

3) Soit f dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrons que f appartient au commutant de p si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par f. On sait déjà que cette denière condition est nécessaire (exercice classique : si u et v commutent, image et noyau de u sont stables par v), montrons qu'elle est suffisante. Soit x dans E. Comme p est un projecteur on a $E=\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Im} p$, il existe donc (x_1,x_2) dans $\operatorname{Ker} p\times\operatorname{Im} p$ tel que $x=x_1+x_2$. Comme on a $p(x)=x_1$, on a $f\circ p(x)=f(x_1)$ et par ailleurs, $p\circ f(x)=p(f(x_1)+f(x_2))=f(x_1)$, car par hypothèse Im p et Ker p sont stables par f. On sait que f appartient au commutant de p si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par f. Soit k le rang de p, soient $(e_1,\dots,e_k)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $(e_{k+1},\dots,e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$, comme $E=\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Im} p$, la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f si et seulement si dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, f admet une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \begin{array}{l} \operatorname{Im} p \\ \operatorname{Ker} p \end{array}$$

On en déduit que la dimension du commutant de p est $k^2 + (n-k)^2$.

4) On va essayer de construire une famille libre de projecteurs à partir des matrices E_{ij}. Pour i dans $[\![1, n]\!]$, la matrice E_{ii} est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$. On peut constater que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ les matrices $E_{ii} + E_{ij}$ sont également des matrices de projecteurs (il suffit de calculer leur carré pour s'en convaincre). On peut regrouper toutes ses matrices dans la description suivante : Soient i et j dans $[\![1, n]\!]$. On définit P_{ij} la matrice égale à $E_{ii} + (1 - \delta_{ij}) E_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). La famille des $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille de matrices de projecteur. La liberté de la famille des $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ permet de montrer sans difficulté la liberté de la famille des $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. En effet soit $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ telle que :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij} P_{ij} = 0.$$

En remplaçant P_{ij} par son expression $E_{ii} + (1 - \delta_{ij}) E_{ij}$, on constate que pour $i \neq j$ le seul coefficient devant E_{ij} est a_{ij} ; tous ces coefficients sont donc nuls. La relation (1) se simplifie alors en $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} = 0$, dont on déduit que pour i dans $[\![1, n]\!]$ les a_{ii} sont tous nuls.
On a donc ainsi construit une famille de projecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui est libre et dont le cardinal est n^2. Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est de dimension n^2, la famille proposée est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et elle est donc de cardinal maximal.

III. Trace

Exercice 14

1) Soit f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$, telle que $f(A) = (M \mapsto \operatorname{tr}(AM))$.
Montrons qu'elle est injective : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout M, $\operatorname{tr}(AM) = 0$.
Soit $k, l \in [\![1, n]\!]$ et la matrice élémentaire $E_{k,l}$. Alors $AE_{k,l}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la colonne n° l, qui contient la colonne n° k de A. Ainsi cette matrice a sur sa diagonale $n-1$ zéros, et $a_{l,k}$ sur sa l-ème ligne et l-ème colonne. La condition $\operatorname{tr}(AE_{k,l}) = 0$ implique que $a_{l,k} = 0$, et ce pour tout k, l, donc $A = 0$.
Donc f est injective. Mais f est un endomorphisme en dimension finie, donc f est également surjective, ce qui donne exactement le résultat voulu.

2) On raisonne par l'absurde.
Soit H un hyperplan ne contenant pas de matrice inversible. En particulier $\mathrm{I}_n \notin H$, et donc $\operatorname{Vect} \mathrm{I}_n$ est supplémentaire de H.
Si $i \neq j$, on décompose la matrice élémentaire E_{ij} sous la forme $E_{i,j} = h_{ij} + \lambda_{ij}\mathrm{I}_n$, où h_{ij} est la composante sur H et $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$. Mais si $\lambda_{ij} \neq 0$, $h_{ij} = E_{ij} - \lambda_{ij}\mathrm{I}_n$ est inversible, car c'est une matrice triangulaire n'ayant que des $\lambda_{i,j}$ sur la diagonale : c'est absurde. Donc les E_{ij} avec $i \neq j$ sont dans H.
Or $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{I}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = E_{1,n} + \displaystyle\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} E_{i,j}$ est dans H par combinaison linéaire d'éléments de H, or elle est inversible. D'où une contradiction.

Exercice 15

1) On procède par récurrence sur n.
• Le résultat est évident pour $n = 1$, car la seule matrice de trace nulle de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle, qui est bien sûr semblable à elle-même.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que toute matrice de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice à coefficients diagonaux tous nuls.
Soit $M \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.
- Si M est une homothétie de rapport λ, alors $\operatorname{tr} M = 0$ implique que $\lambda = 0$. Donc M est nulle, elle est semblable à elle-même, et on a le résultat voulu.
- Sinon il existe un vecteur X tel que (X, MX) est libre. Alors on peut compléter (X, MX) en une base $(X, MX, Y_2, \cdots, Y_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. Dans cette base, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à M, la matrice de u est de la forme $M' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \ldots * \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right)$ où $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices M et M' représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables.
Comme $\operatorname{tr} M = 0$, alors $\operatorname{tr}(M') = 0$ donc $\operatorname{tr} N = 0$. On peut alors appliquer

l'hypothèse de récurrence : il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale nulle telle que $B = PNP^{-1}$.
Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. Alors Q est inversible est $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$.
Enfin, en effectuant des produits par blocs :

$$QM'Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \dots * \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \dots * \\ \hline * & \\ \vdots & PNP^{-1} \\ * & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \dots * \\ \hline * & \\ \vdots & B \\ * & \end{array}\right)$$

et cette dernière matrice est bien à diagonale nulle, et elle est semblable à M' et donc aussi à M.
L'hérédité est ainsi acquise et on conclut par principe de récurrence.

2) Si $M = PNP^{-1}$ avec N n'ayant que des 0 sur la digonale, on pose $N = (n_{ij})$ et pour $i \neq j$, $x_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{\alpha_i - \alpha_j}$, où les α_k sont des complexes deux à deux distincts. On pose $x_{ii} = 0$. Si $X = (x_{ij})$ et D =diag(α_k), alors $N = XD - DX$ d'où $M = BC - CB$ avec $B = QXQ^{-1}$ et $C = QDQ^{-1}$.

IV. Polynôme annulateur

Exercice 22

1) Soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. $x = u(y)$ et $0 = u(0) = u^2(x) = u^3(y) = -u(y) = -x$.

2) • Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$. $u^2(x) + x = 0$ donc $x = -u^2(x) \in \operatorname{Im} u$. Donc $\operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Im} u$.
• De plus $(u^2 + \mathrm{Id}) \circ u = 0$ donc on a l'inclusion réciproque.

3) Si u est injective, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$. Donc $u^2 = -\mathrm{Id}$. et donc $(\det u)^2 = -1$, ce qui est absurde car $\det u \in \mathbb{R}$.

4) $\operatorname{Im} u$ est stable par u. Soit $u' = u|_{\operatorname{Im} u}$. Avec la question 2, $u'^2 = -\mathrm{Id}$. Alors $(\det u')^2 = (-1)^{\operatorname{rg} u}$, donc $\operatorname{rg} u$ est pair. Comme $u \neq 0$, alors $\operatorname{rg} u = 2$.

5) $\operatorname{Im} u$ est stable par u. Soit $u' = u|_{\operatorname{Im} u}$. Avec la question 2, $u'^2 = -\mathrm{Id}$. Si u' est une homothétie de rapport λ, alors $\lambda^2 = -1$: c'est absurde.
Donc u' n'est pas une homothétie, donc il existe $x \in \operatorname{Im} u$ tel que $(x, u(x))$ est libre : c'est donc une base de $\operatorname{Im} u$. On la complète en une base $(y, x, u(x))$ de $\mathbb{R}^3$, avec $y \in \operatorname{Ker} u$. Puisque $u^2(x) = -x$, on a le résultat voulu.