Feuille d'exercice n° 03 : **Intégrales généralisées – Corrigé**

I. Révision de 1ère année

Exercice 4 On trouve :

1) $\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t)^2$

2) $\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\left|1+t^3\right|$ (sur $]-1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1[$)

3) $\int \frac{t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\arctan(t^2)$

4) $\int \tan t\,\mathrm{d}t = -\ln|\cos t|$ (sur les intervalles de définition)

5) $\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln|\ln t|$ (sur les intervalles de définition)

6) $\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} = \frac{1}{3}\cos^2 t\sin t + \frac{2}{3}\sin t.$

7) $\int \cos^2 t\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t$

Exercice 5

1) $\int \ln t\,\mathrm{d}t = t\ln t - t$

2) $\int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2\arctan(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\arctan(t)$

3) $\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(2+t+t^2)\mathrm{e}^{-t}$

Exercice 6

1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ (changement $t=\sin\theta$)

2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2} = \frac{\pi}{4}$ (changement $u=\ln t$)

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1} = \ln 2 + 1 - \ln(e+1)$ (changement $t=\ln u$)

4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 4 + 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2}$

5) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

II. Convergence et intégrabilité

Exercice 14

1) • L'application $f : x \longmapsto \frac{1+x}{\sqrt{x}+x^2}$ est continue sur $]0;1]$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en 0 :

On a : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$.

D'après l'exemple de Riemann en $0(1/2<1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, on conclut : f est intégrable sur $]0;1]$.

2) L'application $f : x \longmapsto \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

— Étude en $+\infty$:

On a, pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$|f(x)| = \frac{|\sin x+\cos x|}{\sqrt{x^3+1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x^3+1}} \leqslant \frac{2}{x^{3/2}}$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty(3/2>1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, on déduit que $|f|$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc sur $[0;+\infty[$, puis, par définition, on conclut : f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

3) · L'application $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}$ est continue sur $[1;+\infty[$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en $+\infty$:

On a : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{\ln x}{x^{3/2}}}_{\text{notée } g(x)}$

Et :

$$x^{5/4}g(x) = \frac{\ln x}{x^{1/4}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par prépondérance classique.
D'où, au voisinage de $+\infty$: $\quad x^{5/4}g(x) \leqslant 1$,
puis : $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x^{5/4}}$.
D'après l'exemple de Riemann en $+\infty(5/4 > 1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0, g$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, puis, par théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, on conclut : f est intégrable sur $[1;+\infty[$.

4) L'application $f : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x}}$ est continue sur $]0;1]$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en 0 :

On a : $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$.
D'après l'exemple de Riemann en $0(1/2 < 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, on conclut : f est intégrable sur $]0;1]$.

5) L'application $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{x^3+x^2}$ est continue sur $]0;1]$, et $f \leqslant 0$. Considérons $g = -f \geqslant 0$.

— Étude en 0 :

On a : $g(x) = \frac{-\ln x}{x^3+x^2} \underset{x\to0}{\sim} \underbrace{\frac{-\ln x}{x^2}}_{\text{notée } h(x)}$.

On a, pour tout $x \in]0;1/\mathrm{e}] : -\ln x \geqslant 1$,
donc : $h(x) \geqslant \frac{1}{x^2} \geqslant 0$.
D'après l'exemple de Riemann en $0(2 \geqslant 1)$ l'application $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, n'est pas intégrable sur $]0;1]$. D'après le théorème de minoration pour des fonctions $\geqslant 0$, il s'ensuit que h n'est pas intégrable sur $]0;1]$, puis, par théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0, g$ n'est pas intégrable sur $10;1]$. Enfin, comme $f = -g$, on conclut que f n'est pas intégrable sur $]0;1]$.

6) L'application

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$$

est continue sur $[1;+\infty[$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en $+\infty$:

On a, en utilisant une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\frac{\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, on conclut :
f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

7) L'application $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}$ est continue sur $]-1;1[$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en 1 :

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2+x^4\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)\left(1+x^2+x^4\right)}} \\ &\sim \frac{1}{x\to1}\frac{1}{\sqrt{(1-x)\cdot2\cdot3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{(1-x)^{1/2}} \end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann en $0(1/2 < 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, on déduit que f est intégrable sur $[0;1[$.

— Étude en -1 :

Comme f est paire et que f est intégrable sur $[0;1[$, il s'ensuit que f est intégrable sur $]-1;0]$.
Puisque f est intégrable sur $]-1;0]$ et sur $[0;1[$, on conclut : f est intégrable sur $]-1;1[$.

8) L'application $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}$ est continue sur $]\,0;+\infty[$.

— Étude en 0 :

On a : $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x^3+x^4}} \underset{x\to0}{\sim} \frac{|x|}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{1/2}}$.
D'après l'exemple de Riemann en $0(1/2 < 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0, |f|$ est intégrable sur $]0\,;\,1]$, donc, par définition, f est intégrable sur $]0;1]$.

— Étude en $+\infty$:

On a : $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x^3+x^4}} \leqslant \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty (2>1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0, |f|$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc, par définition, f est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$, on conclut : f est intégrable sur $]0;+\infty[$.

9) L'application $x \longmapsto \frac{1+x^2\mathrm{e}^{-x}}{x^2+\mathrm{e}^{-2x}}$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en $-\infty$:

On a :

$$f(x) = \frac{1+x^2\mathrm{e}^{-x}}{x^2+\mathrm{e}^{-2x}} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}} = \underbrace{x^2\mathrm{e}^{x}}_{\text{notée } g(x)} .$$

et : $x^2 g(x) = x^4\mathrm{e}^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc, au voisinage de $-\infty$: $x^2 g(x) \leqslant 1$,

puis : $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $-\infty (2>1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0, g$ est intégrable sur $]-\infty;-1]$, puis sur $]-\infty;0]$.

Par théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, il s'ensuit que f est intégrable sur $]-\infty;0]$.

— Étude en $+\infty$:

On a : $f(x) = \frac{1+x^2\mathrm{e}^{-x}}{x^2+\mathrm{e}^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$,

car $x^2\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance classique.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty (2>1)$ et le thóorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, il s'ensuit que f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]-\infty;0]$ et sur $[0;+\infty[$, on conclut : f est intégrable sur $]-\infty;+\infty[$.

Exercice 15 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \to f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$. Donc f a une limite finie en $+\infty$. Comme f est intégrable en $+\infty$, cette limite est nulle.

Exercice 17

1) $(\Rightarrow)$: caractérisation séquentielle.

$(\Leftarrow)$: APCR $|f| \leqslant \varepsilon$, et $l-\varepsilon \leqslant \int_0^{n+1} f \leqslant \varepsilon$, donc $l-2\varepsilon \leqslant \int_0^x f \leqslant 2\varepsilon$.

2) $(\Leftarrow)$ est fausse. Exemple : $f(x) = \sin(2\pi x)$: $\int_0^n f = 0$ mais $\int_0^{n+\pi/2} f = 1$.

III. Calculs, limites et équivalents d'intégrales généralisées

Exercice 22

1) **a)** Existence :

— L'application $f : x \longmapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ est continue sur $[1;+\infty[$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en $+\infty$:

On a : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty (2>1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0, f$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ existe.

b) Calcul :

Commençons par éliminer le facteur x du dénominateur, à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$:

$$I = \int_1^0 \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons une mise sous forme canonique :

$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

Par le changement de variable $u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}\left(1+u^2\right)}} \frac{\sqrt{3}}{2}\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}u \\
&= [\operatorname{Argsh} u]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \left[\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right. \\
&= \ln(\sqrt{3}+2) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \ln(\sqrt{3}+2) - \ln\sqrt{3} \\
&= \ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

2) **a)** Existence :

- L'application $f : x \longmapsto \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$, et $f \geqslant 0$.
- Étude en $\pm\infty$
  On a : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x^4}$. D'après l'exemple de Riemann en $\pm\infty$ $(4>1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f est intégrable sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, donc f est intégrable sur $]-\infty;+\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\, \mathrm{d}x$ existe.

b) Calcul :
Par mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+x+1\right)^2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{3}{4}\left(t^2+1\right)\right)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}t}_{\text{notée } J}
\end{aligned}$$

Par parité : $\quad J = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}t.$

Par primitivation par parties :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} &= t\frac{1}{t^2+1} - \int t\frac{-2t}{\left(t^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{t^2+1} + 2\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$2\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{Arctan} t$$

On déduit : $\quad J = \left[\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{Arctan} t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$

et on conclut : $I = \frac{8\sqrt{3}}{9} J = \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{\pi}{2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$

3) **a)** Existence :

- L'application $f : x \longmapsto \frac{x-\operatorname{Arctan} x}{x^3}$ est continue sur $]0;+\infty[$, et $f \geqslant 0$.
- Étude en 0 : On a :

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x-\operatorname{Arctan} x}{x^3} &= \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)}{x^3} \\
&= \frac{1}{3} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

donc f est intégrable sur $]0\,;\,1]$ (faux problème).

— Étude en $+\infty$:

On a : $f(x) = \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty (2 > 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Puisque f est intégrable sur $]0; 1]$ et sur$[1; +\infty[$, f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

On conclut que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} \, \mathrm{d}x$ existe.

b) Calcul : Calculons des primitives, en utilisant une primitivation par parties :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x - \operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{1}{2x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x - \operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x}_{\text{notée } J(x)}.
\end{aligned}$$

On a, par calcul élémentaire ou par décomposition en éléments simples :

$$J(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan} x + \text{ Cte}.$$

D'où :

$$\int \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} \, \mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{Arctan} x}{2x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x}_{\text{notée } F(x)} + \text{ Cte}.$$

On a : $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$.

Pour déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$, groupons les termes de façon à résoudre la forme indéterminée :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\operatorname{Arctan} x - x}{2x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x \\
&= \frac{1}{2x^2}\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) - x\right) + \frac{1}{2} o(1) = o(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

On conclut : $I = [F(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

4) **a)** Existence :

— L'application $f : x \longmapsto \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0\,;1[$, et $f \geqslant 0$.

— Étude en 0 :
On a : $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$.
D'après l'exemple de Riemann en $0 (1/2 < 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f est intégrable sur $]0\,; 1/2]$.

— Étude en 1
On a : $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{2}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{(1-x)^{1/2}}$.
D'après l'exemple de Riemann en $1 (1/2 < 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, f est intégrable sur $[1/2; 1[$.
Puisque f est intégrable sur $]0; 1/2]$ et sur$[1/2; 1[$, f est intégrable sur $]0; 1[$.

On conclut que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x$ existe.

b) Calcul : On a, par une mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
x(1-x) &= -x^2 + x = -\left(x^2 - x\right) \\
&= -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 - (2x-1)^2\right)
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $t = 2x - 1$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1 + \frac{1+t}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-t^2\right)}} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{3+t}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{3}{2} \operatorname{Arcsin} t - \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^1 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$