Feuille d'exercice n° 10 : **Topologie des espaces vectoriels normés**

I. Ouverts, fermés

Exercice 1 (✎) Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.

Exercice 2 Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E, N).

1) On suppose $A \subset B$. Etablir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.

2) Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$ d'autre part.

3) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ d'une part puis $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ d'autre part.

Exercice 3 (✎) Soient A et B deux parties quelconques d'un espace vectoriel normé E. On note $A + B$ l'ensemble $\{a + b,\ (a, b) \in A \times B\}$.

1) Montrer que lorsque A est ouverte, la partie $A + B$ l'est aussi.

2) Montrer que lorsque A est fermée et b est un élément de E, la partie $A + b$ (notation simplifiée de $A + \{b\}$) est fermée également.

Exercice 4 (🚲) On considère l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$. On note $A = \mathbb{Z}$ et $B = \left\{n - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1) Montrer que A et B sont fermés.

2) Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

Exercice 5 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

$$A = \{\text{suites croissantes}\} \qquad B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}.$$

II. Densité

Exercice 6 (▲) Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.
Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E.
En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide.

Exercice 7 (🚲) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

III. Continuité

Exercice 8 (▲) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

1) Soit l'ensemble des nombres dyadiques $\mathscr{D} = \left\{\dfrac{k}{2^n}\ ,\ (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$.
Montrer que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et 2^n, on a : $f\left(\dfrac{k}{2^n}x + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)y\right) = \dfrac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)f(y)$.

3) En déduire que si a, b sont deux réels tels que $f(a) = f(b) = 0$, alors $f|_{[a,b]} = 0$.

4) On suppose dans cette question que f s'annule en 0 et en 1.

  a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n) = 0$.

  b) Montrer que f est nulle.

5) Conclure que dans le cas général f est une fonction affine.

Exercice 9 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|x| > a$ alors $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2) Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 10 ( ) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

2) Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Exercice 12 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

On considère l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = f(1)$.

1) Montrer que L est une application linéaire.

2) En considérant les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$, montrer que L n'est pas continue.

Exercice 13 ( ) Soit φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \varphi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

1) Montrer que φ est linéaire.

2) Examiner si φ est continue pour $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Exercice 14 ( ) On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\|_\infty$ définie par $\|P\|_\infty = \max |a_i|$ si $P = \sum a_i X^i$.
Soit φ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$.
Montrer que φ n'est pas continue.

Exercice 15 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que pour toute suite (u_n) tendant vers 0, $f(u_n)$ est bornée. Montrer que f est continue.