Feuille d'exercice n° 11 : **Séries entières**

I. Rayon de convergence

Exercice 1 () Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$ et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

1) Montrer que $R' \geqslant \max(1, R)$.

2) Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.

3) Exprimer R' en fonction de R.

Exercice 2 ()

1) Montrer que si la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R > 0$, alors la série entière $\sum a_n z^{2n}$ est de rayon de convergence $\sqrt{R}$.

2) Soient R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$.
Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\min\left(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}\right)$, et que, si $|z| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$$

Exercice 3 ()
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$?

Exercice 4 () Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n^3+2} z^n$

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+n^2}{3^n-n^2} z^n$

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\ln\left(n^3+1\right)} z^n$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n$

5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\sin n} z^n$

6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) z^n$.

Exercice 5 () Déterminer le rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^{3n}$.

Exercice 6 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

Exercice 7 Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme et l'on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$S(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \ell.$$

1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est-elle nécessairement convergente ?

2) Dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

II. Régularité

Exercice 8 ( ) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 9 ( )

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1/2$ et pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 ( )

1) Montrer que si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $S \ : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.

2) Montrer que $S \ : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ vérifie les hypothèses de la question précédente et qu'elle n'est pas dérivable en 1.

Exercice 11

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ et calculer sa somme.

Indication : pour $t \in [0,1]$ et $|x| < 1$, on pourra utiliser l'égalité $\dfrac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{1+tx}{1+t^2} + \dfrac{x^2}{1-tx}\right)$.

III. Développements en série entière

Exercice 12 ( )

Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \cos(x+1)$ et préciser le rayon de convergence.

Exercice 13 ( ) Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes (z : variable complexe, x : variable réelle) :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{sh} n z^n$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n!} z^n$

5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$

6) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n^2-1}{n+1} x^n$

7) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(n^2+1\right)(-1)^n x^{2n}$.

Exercice 14 ( ) Pour les fonctions f des exemples suivants, où l'on donne $f(x)$ (x : variable réelle), montrer que f est développable en série entière et calculer son DSE. On précisera le rayon de convergence R.

1) $\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

2) $\dfrac{1}{x^4-3x^2+2}$

3) $(1-x)\ln(1-x)$

4) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

5) $\ln\left(x^2-8x+15\right)$

6) $\dfrac{\sin 4x}{\sin x}$

7) $\dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice 15 ( )

En effectuant un produit de Cauchy, développer en série entière la fonction $f \ : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{1+x}$ et préciser le rayon de convergence.

Exercice 16 ( )

Soit $\varphi \ : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + x\sin 2t}\,\mathrm{d}t$. Donner le développement en série entière de φ sur $]-1, 1[$.

Exercice 17 ()

1) Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R,R[$, la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n+1\right) x^n$.

2) Mêmes questions lorsque $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} x^n$.

Exercice 18 () Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$ et calculer sa valeur.

Exercice 19 ()

1) Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer que a est isolé c'est-à-dire qu'il existe $h>0$ tel que :

$$\forall y \in]a-h, a+h[\setminus \{a\}, f(y) \neq 0.$$

2) En déduire que si f est non nulle et développable en série entière autour de chaque point sur $\mathbb{R}$, alors les zéros de f sont isolés.

3) La fonction

$$f \ : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 20 ()

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2) Etablir que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3) Déterminer le développement en série entière de la fonction f.