Feuille d'exercice n° 15 : **Espace vectoriels préhilbertiens et euclidiens**

I. Produits vectoriels et normes

Exercice 1 (✎) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + b x_2 y_1 + a x_2 y_2$$

Déterminer une CNS portant sur a, b pour que φ définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (🚲) Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que f préserve la norme, puis le produit scalaire, puis enfin que f est linéaire.

Exercice 3 Soit E un ev euclidien de dimension $n \geqslant 2$, et $u_1, \cdots, u_n$ n vecteurs unitaires de E tels que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, on ait $\|u_i - u_j\| = 1$. L'objectif est de montrer que $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E.

1) Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, calculer $< u_i | u_j >$.

2) Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

Posons $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

et $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda n \end{pmatrix}$.

Montrer que $M\Lambda = 0$.

3) Montrer que 1 est valeur propre de M de multiplicité au moins $(n-1)$, et en déduire que M a une dernière valeur propre réelle dont on donnera la valeur.

4) Conclure

Exercice 4 (▲)

1) Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée à son produit scalaire. Montrer que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big).$$

2) Soit $(E, \|.\|)$ un ev réel de dimension finie tel que pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big).$$

Montrer que la norme $\|.\|$ est euclidienne.

Exercice 5 (✎) Montrer que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6 (✎) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 7 Soient x, y et z trois réels tels que $x^2+2y^2+3z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$.

II. Orthogonalité

Exercice 8 Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E, tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1) Montrer que pour tous i, j, $e_i - e_j$ et $e_i + e_j$ sont orthogonaux.

2) Montrer que pour tous i, j, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

3) Montrer que : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha(x|y)$.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{I}$) le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes pairs (respectivement impairs). Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que $(.|.)$ définit sur E un produit scalaire.

2) Démontrer que $\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = E$.

3) Montrer que $\forall P \in \mathscr{P}$, $\forall Q \in \mathscr{I}$, $(P|Q) = 0$.

4) Déterminer une famille orthogonale (P_1, P_2, P_3, P_4) de E, sans vecteur nul.

5) Montrer, en utilisant le produit scalaire $(.|.)$, que :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \left(\frac{ac}{3} + bd\right)^2 \leqslant \left(\frac{a^2}{3} + b^2\right) \times \left(\frac{c^2}{3} + d^2\right).$$

Exercice 10 **– Inégalité de Bessel –**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, soit F un sev de E de dimension finie, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n. de F. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $x \in F$.

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P, Q) de E, on associe $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} P(\cos t)Q(\cos t)dt$. On appelle k^{e} polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ P_k(\cos\theta) = \cos(k\theta).$$

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev $P_0, \ldots, P_n$ constituent une base orthogonale de E.

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 12 (▲) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit qu'elle converge faiblement dans E s'il existe $u \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $\langle u_n, v \rangle \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \langle u, v \rangle$. On notera alors $u_n \rightharpoonup u$ pour signifier que (u_n) converge faiblement vers u dans E.

1) Montrer l'unicité de la limite au sens faible d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Montrer que la convergence pour la norme euclidienne implique la convergence faible.

3) Montrer que si E est de dimension finie, la réciproque est vraie.

4) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de vecteurs de E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \text{(inégalité de Bessel).}$$

5) En déduire que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 .

6) On se propose maintenant de montrer que la réciproque de la question 2 n'est pas vraie en général. Considérons l'espace $E = \mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ (où $f_n : t \mapsto \sin(nt)$) converge faiblement vers 0 , mais pas pour la norme euclidienne.

Exercice 13 (✎) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes.

1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ **2)** $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ **3)** $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 14 (✎) Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1)$ et $v = (2, 4, 7, 2)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.

Exercice 15 (✎) Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, on note :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k-2) Q(k-2)$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire, et déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

III. Projecteurs et distances

Exercice 16 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \operatorname{Ker} p$ et $i \in \operatorname{Im} p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 (✎) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 18 (✎) Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices dans la base $\mathscr{C}$ des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $e_1 - 4e_3$.

Exercice 19 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soit $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - z = -2$, et M le point de coordonnées $(3, 4, 5)$. Calculer $\mathrm{d}(M, \mathscr{P})$.

Exercice 20

1) À quelle condition sur $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, l'application $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k)$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

2) En supposant cette condition vérifiée, trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire, et l'orthogonal de $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ t.q. } \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

3) Quelle est la distance de X^n à F ?

Exercice 21 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que u est une projection orthogonale, sur un sous-espace F que l'on précisera.

2) Calculer $\mathrm{d}((1,1,1), F)$.

Exercice 22 Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques d'ordre n . Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf\limits_{S \in S_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{ij} - s_{ij})^2$ (où les s_{ij} sont les coefficients de S).

Exercice 23 (▲) Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E, on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$, et on note $G(x_1, \ldots, x_p)$, le déterminant de cette matrice.

1) Démontrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$.

2) On suppose désormais que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre, et on note $F = \operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Soit également $x \in E$. Démontrer que

$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_p)}{G(x_1, \ldots, x_p)}.$$

IV. Théorème de représentation des formes linéaires

Exercice 24 (▲) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\exists! A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $< P, A >= P(0)$.

2) Existe-t-il $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $< P, A >= P(0)$? (indication : considérer pour $m \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $P_m = (1-X)^m$ et utiliser Cauchy-Schwarz)