Feuille d'exercice n° 16 : **Équations différentielles**

I. Premier ordre

Exercice 1 Trouver $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(x)+\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \\ f(0)=1 \end{cases}$$

Exercice 2 (🚲) Résoudre $2x(1-x)y'+(1-x)y=1$. On fera attention à bien préciser les intervalles de résolution. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$? Lesquelles ?

Exercice 3 (🚲) Résoudre l'équation (E) : $ty'-y=t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (🚲) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $xy'+y=\dfrac{1}{x^2y^2}$ (on pourra poser $u(x)=xy(x)$) ;

2) $yy'+y^2=\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$ (on pourra poser $u(x)=y^2(x)$).

II. Second ordre

Exercice 5 (🚲) Trouver les applications de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x)+f(-x)=x\mathrm{e}^{x}$.

Exercice 6 (🚲) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y''+xy'+y=0$ en effectuant le changement de variable $t=\ln x$.

Exercice 7

1) Calculer la dérivée de la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{2}\arctan t+\dfrac{1}{2}\dfrac{t}{1+t^2}$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y''-2y=0$ en commençant par rechercher une solution polynomiale de degré 2.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y''-2y=t$.

Exercice 8 (🚲) Résoudre l'équation $t^2x''+2tx'-2x=t\cos t-\sin t$ (*indication* : pour la résolution de l'équation homogène, chercher x sous la forme $x=t^\alpha$).

Exercice 9 On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y''+3xy'+y=1+x^2. \qquad (\mathscr{E})$$

On va résoudre cette équation différentielle par plusieurs méthodes différentes. Les questions sont indépendantes.

1) On fait le changement de fonction inconnue $u(x)=xy(x)$.
Former l'équation différentielle (E_1) que satisfait la fonction $u(x)$.
Résoudre (E_1) et en déduire l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

2) On pose $v(x)=x^2y'(x)+xy(x)$.
Déterminer v. En déduire par une autre méthode l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

Exercice 10 (🚲) Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle :

$$(1+x)y''-2y'+(1-x)y=x\mathrm{e}^{x} \qquad (1)$$

Posons $y=z\mathrm{e}^{x}$.

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z.

2) La résoudre.

3) En déduire les solutions de l'équation (1).

Exercice 11 Soit l'équation différentielle **(E)** : $(x^2+1)y''-2y=0$.

1) Question préliminaire : On considère la fonction $\varphi \, : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan} x + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$. Calculer φ'.

2) Déterminer une solution polynomiale de degré 2 de **(E)**, que l'on notera y_0.

3) Montrer que toute fonction y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = y_0\, z$, où z est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

4) En posant $y = y_0\, z$, montrer que y est solution de **(E)** si et seulement si la fonction $Z = z'$ est solution d'une équation différentielle **(E')** que l'on écrira.

5) En déduire toutes les solutions de l'équation **(E)** sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+p(x)y=0$ s'annule.

Exercice 13 Soit $f \, : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f+f'' \geqslant 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi)+f(x) \geqslant 0$.

Exercice 14 On étudie l'équation différentielle

$$(E) : xy''+y'+y=0$$

1) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

Soit f une solution de l'équation (E).

2) Montrer que $xf'^2(x)+f^2(x)$ possède une limite quand x tend vers $+\infty$.

3) En déduire que la fonction f est bornée au voisinage de $+\infty$ et que sa dérivée y est de limite nulle.

4) Justifier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} -f'^2(x)\mathrm{d}x, \quad \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

5) En déduire la limite de f en $+\infty$.

III. Systèmes

Exercice 15 Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = 4x-2y \\ y' = x+y \end{cases}$

Exercice 16 Résoudre le système différentiel linéaire $\begin{cases} x' = x-z \\ y' = x+y+z \\ z' = -x-y+z \end{cases}$.

IV. Développements en série entière

Exercice 17 Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \;\; : \;\; 4tx''-4x'+t^3x=0.$$

Exercice 18 Résoudre l'équation différentielle

$$xy''+2y'+\omega^2xy=0 \text{ avec } \omega \neq 0.$$

Exercice 19 Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \;\; : \;\; 4xy''+2y'-y=0.$$