Feuille d'exercice n° 1-19 : **Révisions par monts et collines**

I. Séries

Exercice 1 (▲) Nous voulons déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k+1}\right)$, avec $x > 0$.

1) Donner la nature de cette série dans le cas où $x \neq 1$.

2) On suppose maintenant que $x = 1$.

a) Montrer que pour tout n, $u_n = \frac{1}{n+1} \prod_{k=2}^{n+1} \left(k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$.

b) Donner un DL de $\ln\left(k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ en $\mathscr{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

c) En déduire que $\ln u_n = -\ln(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \mathscr{O}(1)$.

d) Montrer que $\ln u_n = -\frac{3}{2}\ln(n+1) + \mathscr{O}(1)$.

e) Conclure.

II. Intégrales généralisées

Exercice 2 (▲) [Irrationalité du nombre π]

1) Pour $a, b \in \mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.
Pour calculer $P_n^{(m)}$, on distinguera les cas $m < n$, $n \leqslant m \leqslant 2n$ et $2n < m$, et on utilisera la formule de Leibniz.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin t \,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \to 0$.

3) Grâce à une succession d'IPP montrer que $I_n = \left[\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\sin(t+k\pi/2)P_n^{(k-1)}(t)\right]_0^\pi$.

4) En supposant $\pi = \frac{a}{b}$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$ et conclure.

Exercice 3 (▲)
Soient $\alpha > 0$ et $f \in \mathscr{C}^0\left([1,+\infty[, \mathbb{R}_+^*\right)$.

1) On suppose que f est intégrable sur $[1,+\infty[$. On pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$. Nous souhaitons étudier l'intégrabilité de $g : x \mapsto \frac{f(x)}{R(x)^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.

a) Montrer que R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, de dérivée $-f$ et que $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

b) En déduire une primitive de g, en distinguant les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.

c) Conclure.

2) On suppose que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. On pose $S(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$. Étudier l'intégrabilité de $h : x \mapsto \frac{f(x)}{S(x)^\alpha}$ sur $[2,+\infty[$.

III. Suites de fonctions

Exercice 4 On définit $(u_n)_n$ suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t.$$

1) Par récurrence, montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2) Montrer que pour tout n et x, $|u(x) - u_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k(x) - u_{k-1}(x))\right|$.

3) En déduire, pour tout $x \in [0,1]$, la convergence de la suite $(u_n(x))_n$.

4) Établir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle.

5) Montrer que $\forall\, x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x u_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^x u\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t$.

6) Montrer que $u'(x) = u\left(x - x^2\right)$.

IV. Réduction

Exercice 5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A. Nous voulons montrer que A est diagonalisable.

1) Montrer qu'il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts tels que $R = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X^2 - 2X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de A.

2) Montrer qu'aucun des λ_i ne vaut -1.

3) En déduire que R est scindé à racines simples et conclure.

V. Séries de fonctions

Exercice 6 On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \;:\; [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

On note S la somme.

2) Montrer : $S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

3) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \;:\; [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{nx}}$.

Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|f_n(x) - g_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2x^{3/2}} \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

4) On note $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Établir : $S(x) = \dfrac{a}{\sqrt{x}} + \underset{x \to +\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

VI. Séries entières

Exercice 7

1) Soient $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ assez petit, tel que $\forall\, x \in [a - \eta, a + \eta]$, $\left|f(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right| \leqslant \frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{2n!}|x - a|^n$.

b) En déduire que a est isolé c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que $\forall\, y \in]a - h, a + h[\setminus \{a\}$, $f(y) \neq 0$.

2) En déduire que si f est non nulle et développable en série entière autour de chaque point sur $\mathbb{R}$, alors les zéros de f sont isolés.

3) La fonction $f \;:\; x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$ est-elle développable en série entière en 0 ?

VII. Espérance, variance, covariance

Exercice 8 () On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera ***séquence*** une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

PFFPPPFPFFF... FFFPFPPPFPFPPP...

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1) On note L_1 la longueur de la première séquence, et X_i la variable aléatoire égale à 1 si le ième lancer donne Pile, égale à 0 sinon.

- **a)** Donner la loi de L_1.
- **b)** Donner l'espérance de L_1.
- **c)** Donner la variance de L_1, en commençant par calculer $E(L_1(L_1-1))$.

2) On note L_2 la longueur de la deuxième séquence.

- **a)** Calculer la loi conjointe de (L_1, L_2).
- **b)** Donner la loi de L_2.
- **c)** Donner l'espérance de L_2.
- **d)** Donner la variance de L_2.

3)
- **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geqslant x + \frac{}{1}x$.
- **b)** Montrer que $\mathrm{E}\left(L_1\right) \geqslant \mathrm{E}\left(L_2\right)$ et $\mathrm{V}\left(L_1\right) \geqslant \mathrm{V}\left(L_2\right)$.

4) Calculer $\operatorname{Cov}\left(L_1, L_2\right)$.

5) Calculer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P_{[L_1=m]}\left(L_2=n\right)$.

VIII. Espace vectoriels préhilbertiens et euclidiens

Exercice 9 () Soit E un espace préhilbertien. Pour $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E, on appelle matrice de Gram la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $\left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{i,j}$. On appelle déterminant de Gram des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$, et on note $G\left(x_1, \ldots, x_p\right)$, le déterminant de cette matrice.

1) Nous voulons montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G\left(x_1, \ldots, x_p\right) \neq 0$.

- **a)** On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille liée. Alors il existe j tel que le j-ième vecteur est combinaison linéaire des autres. En déduire que les colonnes de la matrice de Gram sont donc liées.
- **b)** Supposons que $G\left(x_1, \ldots, x_p\right) = 0$.
  - **i)** Montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, on a $\langle \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p, x_i\rangle = 0$.
  - **ii)** En déduire que $\left\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\right\|^2 = 0$ et conclure.

2) On suppose désormais que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre, et on note $F = \operatorname{vect}\left(x_1, \ldots, x_p\right)$. Soit également $x \in E$, que l'on écrira $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$. Démontrer que

$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{G\left(x, x_1, \ldots, x_p\right)}{G\left(x_1, \ldots, x_p\right)}.$$