Feuille d'exercice n° 10 : **Relations d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels**

Exercice 1 Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par : $X\mathcal{R}Y$ si $X \cup A = Y \cup A$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 2 ( ) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S}$ sur E par : $x\mathcal{S}y$ si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$).

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 3 ( ) Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $X\mathcal{R}Y$ si ($X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y$). Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 4 Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ est dit *bien ordonné* pour $\preccurlyeq$ si toute partie non vide admet un plus petit élément pour $\preccurlyeq$.

1) Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.

2) Montrer que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

3) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5

1) On définit une relation $\leqslant^0$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \leqslant^0 (x', y') \quad \text{si} \quad x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

- **a)** Montrer que $\leqslant^0$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
- **b)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de $\{(x, y)\}$ pour $\leqslant^0$.
- **c)** Cet ordre est-il total ?

2) On définit une relation $\leqslant^\star$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \leqslant^\star (x', y') \quad \text{si} \quad x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

- **a)** Montrer que $\leqslant^\star$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Cet ordre s'appelle l'ordre *lexicographique*.
- **b)** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de $\{(x, y)\}$ pour $\leqslant^\star$.
- **c)** Cet ordre est-il total ?
- **d)** L'ordre lexicographique (sur $\mathbb{R}^2$) possède-t-il la propriété de la borne supérieure ? *Indication* : on pourra considérer $\mathscr{A} = \mathbb{R}_-^\star \times \mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de $\mathbb{R}$.

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B = \left\{ x^2 + 2x + 3 \;\middle|\; x \in [-3; 2] \right\} \qquad C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 7 ( ) Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire*, *i.e.* que k_n prend toujours la même valeur à partir d'un certain rang.

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit

$$A + B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a + b \,\} = \{\, a + b \mid (a,b) \in A \times B \,\}$$

$$\text{et} \qquad \lambda A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ x = \lambda a \,\} = \{\, \lambda a \mid a \in A \,\}.$$

1) Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.

2) Montrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure. Que vaut $\sup (A \cup B)$?

3) Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure. Que vaut $\sup (A + B)$?

4) Montrer que λA possède une borne supérieure. Que vaut $\sup (\lambda A)$? Et si $\lambda < 0$?

Exercice 9 Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ majorée. Montrer

$$\sup \{\, f(x,y) \mid\ (x,y) \in X \times Y \,\} = \sup \{\, \sup \{\, f(x,y) \mid y \in Y \,\} \mid\ x \in X \,\}.$$

Exercice 10 Soient a et b deux réels. Montrer que :

1) $a \leqslant b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$;

2) $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a + b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.

Exercice 11 On veut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

1) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \right) + n$.

2) Conclure.

Exercice 12 On appelle *ouvert* de $\mathbb{R}$ toute partie U de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante.

« Pour tout $x \in U$, il existe un intervalle I ouvert tel que $x \in I \subset U$. »

Soit U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}$. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de $\mathbb{R}$.