Feuille d'exercice n° 18 : **Fractions rationnelles**

Exercice 1 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ est

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}.$$

Exercice 3 () Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose pour $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Mettre sous forme irréductible $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples notées $x_1, \dots, x_n$.

1) Former la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P''}{P}$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 5 () Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

1) $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$

2) $\dfrac{X}{X^2 - 4}$

3) $\dfrac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$

4) $\dfrac{X}{(X+i)^2}$

5) $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$

6) $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$

7) $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$

8) $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$

9) $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$

Indication : pour la dernière fraction, on pourra procéder par divisions euclidiennes successives.

Exercice 6 () Calculer une primitive pour chacune des fonctions rationnelles suivantes.

1) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2}$

2) $\displaystyle\int^x \frac{t}{t^4 + 16}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3 - 7t + 6}$

4) $\displaystyle\int^x \frac{4t^2}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int^x \frac{t^3 + 2t + 1}{t^3 - 3t + 2}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int^x \frac{-2t^2 + 6t + 7}{t^4 + 5t^2 + 4}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7

1) Montrer, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

On factorisera P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $\dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 *Définition* : le barycentre des points $z_1, \ldots, z_m$ affectés des poids $p_1, \ldots, p_m$, si $\sum_{i=1}^{m} p_i \neq 0$, est le point

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \sum_{i=1}^{m} p_i z_i.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.

2) En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire que toute racine de P' s'écrit comme barycentre à poids positifs des racines de P.