# Semaine 3 du 30 septembre 2024 (S40)

# II Rappels et compléments d'algèbre linéaire

## 1 Produits et espaces vectoriels d'applications

### 1.1 Espaces vectoriels produits

### 1.2 Applications à valeurs dans un ev

## 2 Sommes d'espaces vectoriels

### 2.1 Rappels de première année : sommes, sommes directes, supplémentaires

### 2.2 Généralisation à plus de deux sev

## 3 Matrices par blocs

### 3.1 Définition

### 3.2 Opérations par blocs

## 4 Matrices semblables

## 5 Trace d'un endomorphisme, trace d'une matrice

### 5.1 Définition.

### 5.2 Linéarité.

### 5.3 Propriété fondamentale de la trace.

### 5.4 Invariance par similitude.

### 5.5 Trace d'un endomorphisme en dimension finie.

### 5.6 Propriétés.

### 5.7 Trace d'un projecteur.

## 6 Sous-espaces vectoriels stables

### 6.1 Définitions et premières propriétés

### 6.2 Stabilité et matrices triangulaires par blocs

## 7 Déterminant

### 7.1 Déterminant d'une matrice carrée

### 7.2 Déterminant « par blocs »

### 7.3 Déterminant de Vandermonde

## 8 Polynômes d'endomorphismes

### 8.1 Définitions

### 8.2 Polynômes annulateurs

### 8.3 Exemples d'utilisations d'un polynôme annulateur

## 9 Interpolation de Lagrange

### 9.1 Définition du problème

### 9.2 Polynômes de Lagrange

### 9.3 Lien avec le déterminant de Vandermonde

# 10 Exercices à connaître

## 10.1 Image d'une base par un endomorphisme

Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie.

**1)** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme $u$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = F$ et $\mathrm{Im}(u) = G$.

**2)** Construire un tel endomorphisme $u$ avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

## 10.2 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

**1)** Donner les éléments caractéristiques de l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

**2)** Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1, 0, -1)$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1, 2, 0), (1, 1, -1)\right)$.

## 10.3 Une caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où $E$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

**1)** Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $E$ laissant stables tous les sev de dimension 1.

Cette question est archi-classique, et n'est pas toujours présentée sous cette forme.
On pourra se demander le lien entre

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x$$

et

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

**2)** Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $E$ laissant stables tous les sev de dimension 2.

**3)** Si $E$ est de dimension finie, en déduire le "centre" de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).

## 10.4 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

**1)** **a)** Montrer que $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

**b)** En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u + v)$.

**2)** On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

### 10.5 Noyaux itérés

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n$ non nulle. On définit, pour tout entier naturel $p$ :

$$F_p = \operatorname{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \operatorname{Im}(f^p)$$

( $f^p$ désigne l'itérée d'ordre $p$ de $f$ : $f^0 = \operatorname{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$ ).

**1)** Démontrer que, des deux suites de s.e.v. $(F_p)$ et $(G_p)$, l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).

**2)** Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r$ tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel $p$ supérieur ou égal à $r$, $F_p = F_{p+1}$.

**3)** Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel $s$ tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel $p$ supérieur ou égal à $s$, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre $r$ et $s$ ?

**4)** Démontrer que $G_s$ et $F_r$ sont supplémentaires dans $E$.

### 10.6 Endomorphismes nilpotents

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

**1)** Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de $f$.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice $p$.

**2)** Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.

**3)** En déduire que $p \leqslant n$.

**4)** On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\operatorname{rg}(f)$.

**5)** Donner un exemple d'espace vectoriel $E$ de dimension $n$ et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice $n$.

### 10.7 Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

**1)** Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

**2)** Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul $n$, $A^n = \alpha^{n-1} A$.

**3)** Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A) A$.

**4)** Après avoir calculé $(1 + \operatorname{tr} A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \operatorname{tr} A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + \mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A + \mathrm{I}_n)^{-1}$.

### 10.9 Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires $f$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

*Indication :* pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j} E_{k,\ell}$.