Semaine 4 du 7 octobre 2024 (S41)

II Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Le chapitre II reste au programme, ainsi que les exercices à connaître suivants :

10. Exercices à connaître

10.5. Noyaux itérés

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \operatorname{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \operatorname{Im}(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1) Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).

2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.

3) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?

4) Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.

10.6. Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.

3) En déduire que $p \leqslant n$.

4) On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

5) Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

10.7. Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1}A$.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

4) Après avoir calculé $(1+\mathrm{tr}\,A)(A+\mathrm{I}_n) - (1+\mathrm{tr}\,A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + \mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A+\mathrm{I}_n)^{-1}$.

10.9. Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

S'y ajoute :

III Intégrales généralisées

11. Fonctions continues par morceaux sur un segment

12. Rappels de première année

12.1. Le théorème fondamental

12.1a. Primitives

12.1b. Existence de primitives.

12.1c. Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (cas particulier d'intégrales dépendant d'un paramètre).

12.2. Intégration par parties

12.3. Changements de variable

13. Extension aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle

14. Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

14.1. Définition

14.2. Cas des fonctions positives

14.3. Cas général

15. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

16. Propriétés

17. Méthodes de calcul

17.1. Calcul par primitivation

17.2. Intégration par parties

17.3. Changement de variable

18. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

18.1. Définition

18.2. Un exemple de référence : les intégrales de Riemann

18.3. Théorèmes de comparaison

18.4. Étude de l'existence d'une intégrale

19. Exercices à connaître

19.1. Intégrales de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de I_n selon la parité de n.

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$.

3) Montrer : $\forall n \geqslant 1, \quad nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}$.

4) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n(I_{2n})^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\dfrac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\right)^2\right] = \dfrac{1}{\pi}$ (**formule de Wallis**).

19.2. Détermination de la nature d'une intégrale

Préciser la nature des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ (et la calculer).

19.3. Intégration par parties et équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

2) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

19.4. Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

4) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?