Semaine 8 du 19 novembre 2024 (S47)

VI Suites de fonctions

Le chapitre VI reste au programme :

1 Convergence simple et convergence uniforme

1.1 Convergence simple

1.2 Convergence uniforme

1.3 Convergence uniforme sur tout segment

2 Continuité

3 Interversion limite - intégrale

3.1 Intégration sur un segment

3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

4 Dérivabilité

4.1 Théorème de dérivation

4.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

5 Exercices à connaître

5.1 Limite uniforme d'un produit

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un intervalle réel I, et convergeant uniformément vers f et g respectivement.

1) Montrer que f est bornée si et seulement si à partir d'un certain rang toutes les f_n sont bornées.

2) Montrer que si f et g sont bornées, alors $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

3) Soit h une fonction bornée. Montrer que $(f_n h)$ converge uniformément vers fh, sans supposer que f est bornée.

4) Montrer que ce dernier résultat est faux si h n'est pas bornée.

5.2 Étude du type de convergence (banque CCP MP)

1) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(x\sqrt{n})$.

- **a)** Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
- **b)** La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
- **c)** Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
- **d)** La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

5.3 Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

Soit $f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1) Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque $n \geqslant N$?

2) Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

5.4 Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

1) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

5.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0,+\infty[$ fixé : $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

5.6 Recherche d'un équivalent d'une intégrale à paramètre entier naturel

Trouver un équivalent simple, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$, on admettra : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$.

S'y ajoute :

VII Réduction des endomorphismes et des matrices

1 Diagonalisation en dimension finie

1.1 Endomorphismes diagonalisables

1.2 Matrices diagonalisables

1.3 Pratique de la diagonalisation

2 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

3 Applications de la diagonalisation

3.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

3.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

3.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

3.4 Systèmes différentiels linéaires

4 Trigonalisation en dimension finie

4.1 Endomorphismes trigonalisables

4.2 Matrices trigonalisables

4.3 Trigonalisation et polynômes

5 Exercices à connaître

5.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

5.2 Deux applications de la trigonalisation

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

- **a)** Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
- **b)** Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(P(u)) = P(\mathrm{Sp}\,(u))$.

5.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

5.4 Racine carrée d'une matrice

1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?