Semaine 14 du 20 janvier 2025 (S4)

XII – Variables aléatoires discrètes

Le chapitre XII reste au programme :

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

1.2 Évènements associés à une variable aléatoire

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

2.1 Définition

2.2 Loi conditionnelle

3 Lois usuelles

3.1 Rappels : lois usuelles finies

3.2 Loi géométrique

3.3 Loi de Poisson

4 Couples de variables aléatoires

4.1 Définition, loi conjointe, lois marginales

4.2 Extension aux n-uplets de variables aléatoires

5 Variables aléatoires indépendantes

5.1 Définition

5.2 Évènements indépendants et variables aléatoires indépendantes

5.3 Extension au cas de n variables aléatoires

5.4 Fonctions de variables aléatoires indépendantes

5.5 Familles infinies de variables aléatoires indépendantes

6 Exercices à connaître

6.1 Premier tirage d'une boule (Banque CCP MP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer la loi de Y.

6.2 Loi d'un couple et lois marginales

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer la valeur de a.

2) Déterminer les lois marginales X et Y.

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X = Y)$.

6.3 Max et min de deux lois géométriques (Banque CCP MP)

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X=k)=P(Y=k)=pq^k$ où $p \in\,]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U=\max(X,Y)$ et $V=\min(X,Y)$.

1) Déterminer la loi du couple (U,V).

2) Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.

3) Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique.

4) U et V sont-elles indépendantes ?

6.4 Couples de variables aléatoires de Poisson (Banque CCP MP)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé.

1) Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de X_1+X_2.

2) Soit $p \in\,]0,1]$. Soit $\lambda \in\,]0,+\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
Déterminer la loi de X.

S'y ajoute :

XIII - Intégrales à paramètre

1 Cadre

1.1 Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (et pas ailleurs)

1.2 Fonctions définies par une intégrale, dont la variable n'intervient pas dans les bornes

1.3 Et si la variable intervient à la fois dans les bornes et dans l'intégrande ?

2 Continuité

2.1 Théorème de continuité par domination

2.2 Limite

3 Dérivation

3.1 Rappels de première année : dérivées partielles

3.2 Dérivation par domination

3.3 Dérivées d'ordres supérieurs

4 Exercices à connaître

4.1 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in\,]0,+\infty[$, $f(x,t)=\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

4.2 Produit de convolution

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}, 2\pi$ périodiques, à valeurs complexes. On munit E de la norme N_∞.
On étudie la loi $*$ qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction $f * g$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

et appelée ***produit de convolution*** de f et g.

1) Montrer qu'une fonction continue périodique est bornée.

2) Démontrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et donner un majorant de $N_\infty(g * f)$ en fonction de $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$.

3) Démontrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.

4) Montrer que la fonction $f * g$ est égale à la fonction $g * f$.

5) Soit $k, l \in \mathbb{Z}$, $e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ et $e_l : t \mapsto \mathrm{e}^{ilt}$. Calculer $e_k * e_l$.

4.3 L'intégrale de Gauss

Soient $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et déterminer leur dérivée.

2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3) En déduire $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

4.4 Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

On utilisera directement ici que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $s \in \mathbb{R}_+$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer $F(s)$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que F est continue en 0.

4) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.