Semaine 15 du 27 janvier 2025 (S5)

XIII – Intégrales à paramètre

Le chapitre XIII reste au programme :

1 Cadre

1.1 Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (et pas ailleurs)

1.2 Fonctions définies par une intégrale, dont la variable n'intervient pas dans les bornes

1.3 Et si la variable intervient à la fois dans les bornes et dans l'intégrande ?

2 Continuité

2.1 Théorème de continuité par domination

2.2 Limite

3 Dérivation

3.1 Rappels de première année : dérivées partielles

3.2 Dérivation par domination

3.3 Dérivées d'ordres supérieurs

4 Exercices à connaître

4.1 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in\ ]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in\ ]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma\,'(x)$ sous forme d'intégrale.

4.2 Produit de convolution

On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π périodiques, à valeurs complexes. On munit E de la norme N_∞.
On étudie la loi $*$ qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction $f*g$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

et appelée ***produit de convolution*** de f et g.

1) Montrer qu'une fonction continue périodique est bornée.

2) Démontrer que la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et donner un majorant de $N_\infty(g*f)$ en fonction de $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$.

3) Démontrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.

4) Montrer que la fonction $f*g$ est égale à la fonction $g*f$.

5) Soit $k,l \in \mathbb{Z}$, $e_k : t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ et $e_l : t \mapsto \mathrm{e}^{ilt}$. Calculer $e_k * e_l$.

4.3 L'intégrale de Gauss

Soient $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$et déterminer leur dérivée.

2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3) En déduire $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

4.4 Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

On utilisera directement ici que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $s \in \mathbb{R}_+$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Calculer $F(s)$ pour $s \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que F est continue en 0.

4) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

S'y ajoute :

XIV – Espérance, variance, covariance etc

1 Espérance

1.1 Définition

1.2 Propriétés

1.3 Formule de transfert

1.4 Variables indépendantes

1.5 Lois usuelles

2 Variance

2.1 Définition

2.2 Propriétés

2.3 Lois usuelles

3 Covariance

!! Les sections sur les inégalités probabilistes (Markov & co) ainsi que les fonctions génératrices ne seront au programme que la semaine prochaine !!

4 Exercices à connaître

4.1 Calculs d'espérance et de variance (banque CCINP MP)

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

- **a)** Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
- **b)** Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
  Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
- **c)** Déterminer l'espérance et la variance de Z.

4.2 Un couple de variables aléatoires (banque CCP MP)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1) Déterminer les lois de X et de Y.

2)
- **a)** Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
- **b)** Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X = Y)$.