Semaine 16 du v3 février 2025 (S6)

XIV – Espérance, variance, covariance etc

Le chapitre XIV est au programme en entier :

1 Espérance

1.1 Définition

1.2 Propriétés

1.3 Formule de transfert

1.4 Variables indépendantes

1.5 Lois usuelles

2 Variance

2.1 Définition

2.2 Propriétés

2.3 Lois usuelles

3 Covariance

4 Inégalités probabilistes

4.1 Inégalité de Markov

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

4.3 Loi faible des grands nombres

5 Fonctions génératrices

5.1 Fonctions génératrices des lois usuelles

5.2 Fonction génératrice, espérance et variance

5.3 Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

6 Exercices à connaître

6.1 Calculs d'espérance et de variance (banque CCINP MP)

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X. Justifier.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

  a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y=k)$.

  b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
  Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

  c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

6.2 Un couple de variables aléatoires (banque CCP MP)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1) Déterminer les lois de X et de Y.

2) **a)** Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $P(X=Y)$.

6.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (banque CCINP MP)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n admet une variance.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver que : $\forall\, a \in\,]0,+\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

6.4 Calculs d'espérance et de variance grâce à la fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est

$$G_X(t) = \frac{t}{2-t^2} \qquad \text{pour tout } t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

1) Calculer la loi de X.

2) Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{1}{2}(X+1)$. En déduire l'espérance et la variance de X.

6.5 Détermination d'une fonction génératrice (banque CCINP MP)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1) Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:

a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.

b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in]-1,1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

S'y ajoute, en révision, l'intégralité des chapitres suivants :

II. Rappels et compléments d'élgèbre linéaire
IV. Espaces vectoriels normés
V. Valeurs propres et vecteurs propres
VII. Réduction des endomorphismes

Les exercices à connaître sont les suivants :

2 Rappels et compléments d'élgèbre linéaire

2.1 Image d'une base par un endomorphisme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

2.2 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}(1, 0, -1)$ et parallèlement à $\operatorname{Vect}((1, 2, 0), (1, 1, -1))$.

2.3 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) **a)** Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

b) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.

2) On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)).$$

2.4 Noyaux itérés

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \operatorname{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \operatorname{Im}(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \operatorname{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1) Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).

2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.

3) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?

4) Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.

2.5 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.

3) En déduire que $p \leqslant n$.

4) On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

5) Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

2.6 Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1} A$.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A) A$.

4) Après avoir calculé $(1 + \mathrm{tr}\, A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \mathrm{tr}\, A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + \mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A + \mathrm{I}_n)^{-1}$.

2.7 Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

4 Espaces vectoriels normés

4.1 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1, \dots, N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E, N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k, N_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$.

4.2 Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n} X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

4.3 Opérations sur les convexes

Une réunion finie de convexes est-elle convexe ? Et une intersection ?
Et pour des réunions et intersections quelconques ?

4.4 Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius.*

3) Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.

4) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

5 Valeurs propres et vecteurs propres

5.1 Spectres de matrices qui commutent

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA on le même spectre.

5.2 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

5.3 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

5.4 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}(X + a_0) = (-a_0)$.

1) Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.

2) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V^{-1}$$

où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

7 Réduction des endomorphismes

7.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

7.2 Deux applications de la trigonalisation

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(P(u)) = P(\mathrm{Sp}\,(u))$.

7.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

7.4 Racine carrée d'une matrice

1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?