Semaine 17 du 10 février 2025 (S7)

XIV – Espérance, variance, covariance etc (fin) – révisions d'algèbre

La fin du chapitre XIV est au programme :

4 Inégalités probabilistes

4.1 Inégalité de Markov

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

4.3 Loi faible des grands nombres

5 Fonctions génératrices

5.1 Fonctions génératrices des lois usuelles

5.2 Fonction génératrice, espérance et variance

5.3 Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

6 Exercices à connaître

6.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (banque CCINP MP)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n admet une variance.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.

3) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

6.2 Calculs d'espérance et de variance grâce à la fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est

$$G_X(t) = \frac{t}{2-t^2} \qquad \text{pour tout } t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

1) Calculer la loi de X.

2) Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{1}{2}(X+1)$. En déduire l'espérance et la variance de X.

6.3 Détermination d'une fonction génératrice (banque CCINP MP)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1) Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.

2) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$.
Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$:

- **a)** en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
- **b)** en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in]-1, 1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

S'y ajoute :

XV - Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

1.2 Norme associée à un produit scalaire

2 Orthogonalité

2.1 Premières définitions.

2.2 Familles orthogonales.

3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

4 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

5 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien.

5.1 Rappels de première année : hyperplans en dimension finie

5.2 Théorème de représentation et hyperplans dans un espace euclidien

6 Symétries et projecteurs orthogonaux

6.1 Rappels de première année sur les projecteurs et les symétries

6.2 Symétries et projecteurs orthogonaux

7 Distance à un sous ev

7.1 Distance et projection sur un hyperplan

8 Exercices à connaître

8.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1) **a)** Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2) Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

8.2 Polynômes de Legendre

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

1) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E. On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

2) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}\left(\left(X^2-1\right)^k\right)$$

a) Déterminer le degré de f_k.

b) Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

c) En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

8.3 Une projection orthogonale (banque CCINP MP)

On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1) Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.

3) Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.

4) Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

8.4 Une autre distance

Pour $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, calculer :

$$m_k = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left(t^k - at - b\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

S'y ajoute, en révision, l'intégralité des chapitres suivants :

II. Rappels et compléments d'élgèbre linéaire
IV. Espaces vectoriels normés
V. Valeurs propres et vecteurs propres
VII. Réduction des endomorphismes

Les exercices à connaître sont les suivants :

2 Rappels et compléments d'algèbre linéaire

2.1 Image d'une base par un endomorphisme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\mathrm{Ker}(u) = F$ et $\mathrm{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

2.2 Expression et éléments caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie

1) Donner les éléments caractéristiques de l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x & - & y & + & 2z \\ -x & + & 3y & + & 2z \\ x & + & y & + & 2z \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(1, 0, -1)$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1, 2, 0), (1, 1, -1)\right)$.

2.3 « Inégalité triangulaire » et une autre inégalité autour du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) **a)** Montrer que $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

b) En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u + v)$.

2) On suppose que $E = F$, et $\dim E = n$. Montrer l'encadrement :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

2.4 Noyaux itérés

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \mathrm{Ker}\left(f^p\right) \qquad \text{et} \qquad G_p = \mathrm{Im}\left(f^p\right)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1) Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).

2) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.

3) Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?

4) Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.

2.5 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$.

1) Montrer qu'il existe un unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de f.

Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{F} = (x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre.

3) En déduire que $p \leqslant n$.

4) On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

5) Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

6) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

2.6 Endomorphismes de rang 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = CL$.

2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \alpha^{n-1}A$.

3) Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$.

4) Après avoir calculé $(1 + \mathrm{tr}\,A)(A + \mathrm{I}_n) - (1 + \mathrm{tr}\,A)\mathrm{I}_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A + \mathrm{I}_n$ soit inversible. Le cas échéant, déterminer $(A + \mathrm{I}_n)^{-1}$.

2.7 Une caractérisation de la trace

Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

4 Espaces vectoriels normés

4.1 Produit d'espaces vectoriels normés

Soit $E_1, \ldots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev, munis respectivement des normes $N_1, \ldots, N_p$. On considère l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$. Sur E, on pose l'application

$$N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} N_k(x_k) \end{array}.$$

Montrer que N est une norme sur E.
(E, N) est appelé *espace vectoriel normé produit* des $(E_k, N_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$.

4.2 Comparaison de deux normes

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

1) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

3) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

4.3 Opérations sur les convexes

Une réunion finie de convexes est-elle convexe ? Et une intersection ?
Et pour des réunions et intersections quelconques ?

4.4 Norme d'algèbre sur les matrices et convergence d'une suite

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur E.

2) Montrer que la norme associée à ce produit scalaire est en fait la norme $\|.\|_2$ de E muni de la base canonique. On l'appelle aussi *norme de Frobenius.*

3) Montrer que pour tout $A, B \in E$, $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$.

4) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|_2 < 1$. Montrer que $A^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

5 Valeurs propres et vecteurs propres

5.1 Spectres de matrices qui commutent

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA on le même spectre.

5.2 Détermination du spectre d'un endomorphisme de polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : P \mapsto XP'(X)$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

5.3 Éléments propres d'une matrice

Donner les éléments propres de

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

5.4 Matrice compagne

Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ polynôme unitaire, on définit la matrice compagne de P :

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 1$, P s'écrit $X + a_0$ et $\mathscr{C}(P) = \mathscr{C}(X + a_0) = (-a_0)$.

1) Montrer que P est le polynôme caractéristique de $\mathscr{C}(P)$.

2) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :

$$\mathscr{C}(P)^\top = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V^{-1}$$

où V désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

7 Réduction des endomorphismes

7.1 Deux diagonalisations – bête et méchante et plus théorique

1) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j, a_{i,j} = \beta$ sinon.

7.2 Deux applications de la trigonalisation

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

b) Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(P(u)) = P(\mathrm{Sp}\,(u))$.

7.3 Diagonalisation simultanée

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

1) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

2) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

7.4 Racine carrée d'une matrice

1) Soit M une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que les matrices commutant avec M sont exactement les matrices diagonales.

2) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?