Semaine 19 du 17 mars 2025 (S12)

XVI - Équations différentielles

Le chapitre XVI reste au programme :

1 Généralités sur les équations différentielles linéaires.

1.1 Cadre

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

2 Rappels sur les équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Résolution de l'équation homogène

2.2 Résolution d'une équation avec second membre.

3 Rappels sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Cadre du programme de première année

3.2 Résolution d'une équation avec second membre

3.3 Seconds membres particuliers

4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients continus

4.1 Théorème de Cauchy linéaire et structure de l'ensemble des solutions

Il n'y aucune méthode au programme pour trouver une solution particulière, l'énoncé doit vous guider.

4.2 Si l'on connaît une solution de l'équation homogène

On utilise la méthode variation de la constante.

4.3 Trouver une solution grâce à un développement en série entière

5 Systèmes différentiels

5.1 Définition

Il n'y a rien au programme concernant l'étude générale des systèmes différentiels linéaires.
Nous nous cantonnons à donner des exemples dans le cas où les a_{ij} sont des constantes et où A est diagonalisable ou trigonalisable.

5.2 Exemples

6 Autres méthodes à connaître

Nous présentons ces techniques au travers d'exemples uniquement.

6.1 Raccordements de solutions

6.2 Changements de fonction ou de variable

7 Exercices à connaître

7.1 Méthode de variation de la constante

1) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan t + \dfrac{1}{2}\dfrac{t}{1+t^2}$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = 0$ en commençant par rechercher une solution polynomiale de degré 2.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(t^2+1)y'' - 2y = t$.

7.2 Un raccordement de solutions (banque CCINP MP)

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

7.3 Un système différentiel linéaire

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y+z \\ y' & = & x \\ z' & = & x+y+z \end{array}\right.$.

7.4 Un changement de fonction

Résoudre $(x^2+1)\,y'' - (3x^2-4x+3)\,y' + (2x^2-6x+4)\,y = 0$
en utilisant le changement de fonction inconnue $z = (x^2+1)\,y$.
S'y ajoute :

XVII - Endomorphismes des espaces euclidiens

8 Orientation d'un espace vectoriel euclidien

9 Endomorphismes orthogonaux

10 Matrices orthogonales

11 Produit mixte

11.1 Définition et propriétés

11.2 Orientation d'une droite ou d'un plan dans un espace euclidien de dimension 3

12 Endomorphismes orthogonaux en dimension 2

13 Endomorphismes orthogonaux en dimension 3

14 Endomorphismes autoadjoints

14.1 Définition et exemples

14.2 Représentation matricielle

15 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

15.1 Propriétés des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

15.2 Théorème spectral

16 Positivité

16.1 Endomorphismes positifs et définis positifs

16.2 Matrices positives et définies positives

17 Exercices à connaître

17.1 Endomorphismes préservant l'othogonalité

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire vérifiant

$$\forall\, x, y \in E,\ (x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$$

1) Calculer $(u + v \mid u - v)$ pour u, v vecteurs unitaires.

2) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

3) Conclure qu'il existe $g \in \mathrm{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

17.2 Matrices orthogonales et inégalités

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

1) $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$ **2)** $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$ **3)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$

4) Peut-on avoir simultanément $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n}$ et $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n$?

17.3 Matrices symétriques positives

1) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}\,(A) \subset [0, +\infty[$.

2) Prouver que $\forall\, A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ A^2 \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3) Prouver que

$$\forall\, A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ AB = BA \implies A^2B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

17.4 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Soit A une matrice symétrique positive réelle de taille n. Montrer qu'il existe une unique matrice B symétrique positive réelle de taille n telle que $B^2 = A$.

17.5 Décomposition polaire

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $A^\top A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) Montrer que A admet une ***décomposition polaire*** $A = \Omega S$ où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser directement qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = A^\top A$.

Et on rajouet cinq chapitres en révision :

III - Intégrales généralisées

VI - Suites de fonctions

VIII - Séries de fonctions

XI - Séries entières

XIII - Intégrales à paramètres

Avec les exercices suivant à connaître :

Exercices à connaître

17.1 Intégration par parties et équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

2) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

17.2 Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

4) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

17.3 Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^{\,x} + x\mathrm{e}^{\,-x}}{n+x}$.

1) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{\,x} + x\mathrm{e}^{\,-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

17.4 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0,+\infty[$ fixé : $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

17.5 La fonction ζ de Riemann

On définit, là où cela est possible, la fonction $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) Donner l'ensemble de définition de ζ.

2) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

3) Montrer que $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]1,+\infty[,\mathbb{R})$.

4) Étudier la monotonie et la convexité de ζ.

5) Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$ et la calculer.

6) Donner un équivalent de ζ en 1^+.

17.6 Tableau de variation d'une série de fonctions

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Préciser le sens de variation de S.

3) Établir $S(x+1) + S(x) = 1/x$.

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

17.7 Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

17.8 La fonction Γ (banque CCINP MP)

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1) Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

2) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

3) Démontrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma\,'(x)$ sous forme d'intégrale.