XVIII. Dérivabilité des fonctions vectorielles

19 février 2025

Table des matières

B - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ *la notion de dérivée d'une fonction numérique. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Interprétation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ comme courbe paramétrée.	L'étude et le tracé d'arcs paramétrés sont hors programme.
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\dots,f_p$ à valeurs vectorielles. Dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et nous allons étudi
fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 2$.
Fixons donc $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $f \ : I \to \mathbb{R}^n$.

1 Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

1.1 Fonctions coordonnées

Définition 1.1.1 (Fonctions coordonnées)**.**
Pour tout $t \in I$, $f(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$: il admet donc un n-up
coordonnées $(f_1(t), \dots, f_n(t))$.
Si $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $f_n \ : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f_n(t)$ est appelée i
fonction coordonnée de f.

Exemple 1.1.2.

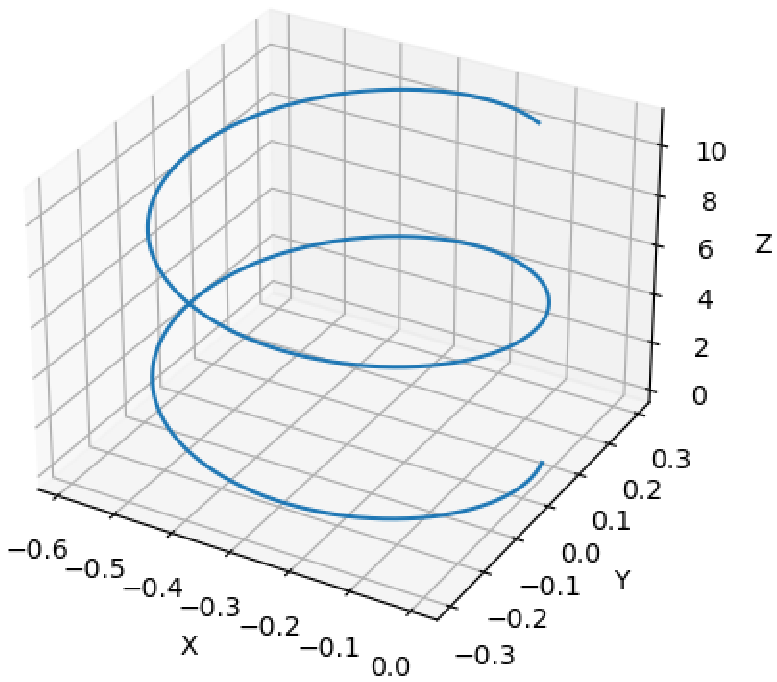
Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \mathrm{e}^{2t} \\ t^2+1 \end{pmatrix}$. Alors $f_1 \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos t$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ et $f_3 \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2 + 1$.

1.2 Courbe paramétrée

L'image de $t \in I$ par f est un point de $\mathbb{R}^n$, et l'ensemble imag
par f peut être vu comme la trajectoire d'un mobile dans l'espace I
fonction du temps.
Le couple (I, f) est d'ailleurs appelé ***arc paramétré*** ou ***courbe paramétrée***.

Exemple 1.2.1.

Voici le tracé de la courbe $\begin{cases} x(t) &= \sin(\alpha)(1-\cos(t)) \\ y(t) &= \sin(\alpha)\sin(t) \\ z(t) &= t\cos(\alpha) \end{cases}$, qui correspond à la trajectoire d'une particule chargée dans un chanp magnétique.



2 Dérivabilité en un point et sur un intervalle

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 (Dérivée en un point)**.**
Soit $a \in I$. On dit que f est ***dérivable*** en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Si c'est le cas, cette limite est notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$, et s'appelle ***dérivée de f en*** a ou ***vecteur dérivé de f en*** a.

Remarque 2.1.2.
Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un élément de $\mathbb{R}^n$. Puisque seules les limites dans $\mathbb{R}$ peuvent être infinies, il est inutile dans la définition de supposer que ce taux d'accroissement a une limite **finie** : seule son existence suffit.
Ainsi sa limite, si elle existe, est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.1.3.

1. Si f est dérivable en a, nous pouvons aussi écrire $f'(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, nous dirons que f est ***dérivable à droite en*** a, et cette limite est la ***dérivée à droite de f en*** a, notée $f'_d(a)$.
   La même définition existe bien sûr aussi pour la dérivée à gauche, avec la notation $f'_g(a)$.
   Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est alors dérivable en a si et seulement si elle l'est à gauche et à droite et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Définition 2.1.4 (Dérivabilité sur un intervalle)**.**
On dit que f est ***dérivable sur*** I si elle dérivable en tout point de I.
La ***fonction dérivée de*** f est alors la fonction $f' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$.

Remarque 2.1.5.
Si f décrit un mouvement ponctuel, $f'(a)$ représente le vecteur vitesse à l'instant $t=a$. Lorsque la fonction dérivée est elle-même dérivable, $f''(a)$ désigne le vecteur accélération.

2.2 Développements limités

Définition 2.2.1 (Relation de Landau o vectorielle)**.**
Soit g une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et $a \in I$. On dit que f est ***négligeable devant g en*** a, ce que l'on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$, s'il existe une fonction **vectorielle** $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ telle que $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$ et si au voisinage de a, $f(x) = g(x).\varepsilon(x)$.

Définition 2.2.2 (Développements limités d'ordre 0 et 1 vectoriels)**.**

1. On dit que f ***admet un DL d'ordre 0 en*** a s'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x)-\ell_0 \underset{x\to a}{=} o(1)$, ce que l'on note plus couramment $f(x) = \ell_0 + o(1)$.
2. On dit que f ***admet un DL d'ordre 1 en*** a s'il existe $\ell_0, \ell_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) - \ell_0 - \ell_1(x-a) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$, ce que l'on note plus couramment $f(x) = \ell_0 + \ell_1(x-a) + o(x-a)$.

Proposition 2.2.3.

1. $f \underset{a}{\to} 0$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$.
2. f est continue en $a \in I$ si et seulement si elle admet un DL d'ordre 0 en a.
   Si c'est le cas, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.
3. f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si elle admet un DL d'ordre 1 en a.
   Si c'est le cas, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Démonstration.
1. Simple réécriture de la définition : $f(x) = 1.\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon = f$.
2. • f est continue en $a \Rightarrow f - f(a) \underset{a}{\to} 0 \Rightarrow f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} o(1)$.
   • Si $f(x) = \ell_0 + o(1)$ alors $f \underset{a}{\to} \ell_0$, et f a une limite en a. Mais comme f est définie en a, alors $f(a) = \ell_0$.

3. f est dérivable en a ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)-(x-a)\ell}{x-a} \underset{x\to a}{=} o(1)$ ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x)-f(a)-(x-a)\ell \underset{x\to a}{=} o(x-a)$.

□

Corollaire 2.2.4.
Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Remarque 2.2.5.
La réciproque est bien sûr fausse. Considérer par exemple la fonction $x \mapsto |x| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.3 Dérivabilité et fonctions coordonnées

Théorème 2.3.1.
f est dérivable en a si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont.
Dans ce cas, $f'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a) \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Ce résultat découle directement du résultat sur le lien entre la limite d'une fonction vectorielle et les limites de ces fonctions coordonnées, vu dans le chapitre sur la topologie des espaces vectoriels normés. □

Exemple 2.3.2.
$f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & e^{2t} \\ 1-t^2 & \ln(1+t^2) \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t & 2e^{2t} \\ -2t & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$.

Corollaire 2.3.3.
f est constante sur I si et seulement si f est dérivable sur I et $f' = 0$.

Remarque 2.3.4.
Il est indispensable que I soit un intervalle.

3 Opérations sur les fonctions dérivables

3.1 Combinaisons linéaires

Théorème 3.1.1.
Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f et g sont dérivables en a, alors $f + \lambda g$ également et $(f+\lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.

Démonstration.
Passer par les DL. □

Définition 3.1.2.
On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 3.1.3.
$(\mathscr{D}(I, \mathbb{R}^n), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}^n), +, .)$, et $f \mapsto f'$ est linéaire.

3.2 Dérivabilité et applications linéaires

Théorème 3.2.1.
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $f : I \to \mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors $u \circ f$ également, et $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.

Démonstration.
En dimension finie, u est continue. De plus, pour $x \in I$ tel que $x \neq a$ on a

$$\frac{1}{x-a}\left(u(f(t)) - u\left(f\left(a\right)\right)\right) \underset{u \text{ linéaire}}{=} u\left(\frac{f(x)-f\left(a\right)}{x-a}\right) \underset{t \to a}{\longrightarrow} u\left(f'\left(a\right)\right)$$

car u est continue. □

Exemple 3.2.2.
Soit $M : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Alors $\operatorname{tr} \circ M$ est dérivable et $(\operatorname{tr} \circ M)'(t) = \operatorname{tr}\left(M'(t)\right)$.

3.3 Dérivabilité et applications multilinéaires

Théorème 3.3.1 (Dérivation et applications bilinéaires)**.**
Soit E, F, G trois evn et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Soit $f : I \to E$ et $g : I \to F$ deux applications dérivables en un point $a \in I$.
Alors l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} I & \to & G \\ t & \mapsto & B(f(t), g(t)) \end{array}$ est dérivable en a et $\varphi'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.

Remarque 3.3.2.
1. Cette formule est facile à retenir car vous la connaissez déjà dans le cas suivant : si $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (a, b) \mapsto ab$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$, alors $\varphi = fg$, et $(fg)' = f'g + fg'$.
2. Si E et F sont de dimension finie, B est automatiquement continue.
3. L'énoncé se généralise en modifiant « dérivable en a » par « dérivable sur I ».

Démonstration.
Grâce à la bilinéarité de B, on observe que

$$B(f(x), g(x)) - B(f(a), g(a)) = B(f(x) - f(a), g(x)) + B(f(a), g(x) - g(a)),$$

et ensuite

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} = B\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, g(x)\right) + B\left(f(x), \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right).$$

Il reste à conclure en passant à la limite quand $x \to a$, en utilisant la continuité de B. □

Exemple 3.3.3.
1. L'exemple de la remarque **3.3.2** s'adapte à des produits de matrices. Ainsi, si A et B sont deux fonctions dérivables de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $AB : t \mapsto A(t) \times B(t)$ est dérivable et $(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.
2. Il s'adapte aussi à des produits scalaires : si f et g sont deux fonctions dérivables de I à valeurs dans un espace euclidien E, alors $\varphi : t \mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est dérivable et $\varphi'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$.

La théorème précédent se généralise à toutes les applications multilinéaires :

Théorème 3.3.4 (Dérivation et applications multilinéaires)**.**
Soit $E_1, \dots, E_n$ et F des evn et $g : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to F$ une application n-linéaire continue. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : I \to E_i$ dérivable en un point $a \in I$.
Alors l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} I & \to & F \\ t & \mapsto & g(f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{array}$ est dérivable en a et

$$\varphi'(a) = \sum_{i=1}^{n} (f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f_i'(a), f_{i+1}(a), \dots, f_n(a)).$$

Remarque 3.3.5.
1. Si $E_1, \dots, E_n$ sont tous de dimension finie, g est automatiquement continue.
2. L'énoncé se généralise en modifiant « dérivable en a » par « dérivable sur I ».

Exemple 3.3.6.
1. Si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, alors $f_1 \times f_2 \times \ldots f_n$ est dérivable et $(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots + f_1 \ldots f_{n-1} f_n'$.
2. Si f, g, h sont trois fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}^3$, alors $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(f(t), g(t), h(t))$ est dérivable et $\varphi'(t) = \det(f'(t), g(t), h(t)) + \det(f(t), g'(t), h(t)) + \det(f(t), g(t), h'(t))$.

3.4 Composition

Théorème 3.4.1.
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi\ : J \to I$ et $f\ : I \to \mathbb{R}^n$, et soit $a \in J$.
Si φ est dérivable en a et si f est dérivable en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a).f'(\varphi(a))$.

Démonstration.
Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de a :

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\,\varphi'(a) + (t-a)\,\varepsilon_1(t) \text{ avec } \lim_{t\to a} \varepsilon_1(t) = 0,$$

et le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\varphi(a)$:

$$f(y) = f(\varphi(a)) + (y - \varphi(a)) \cdot f'(\varphi(a)) + (y - \varphi(a)) \cdot \varepsilon_2(y) \text{ avec } \lim_{y \to \varphi(a)} \varepsilon_2(y) = 0.$$

On en déduit, en remplaçant y dans la 2ème équation par $\varphi(t)$ obtenue dans la 1ère :

$$\begin{aligned} f\circ\varphi(t) =& f\circ\varphi(a) + (t-a)\,\varphi'(a)\cdot f'(\varphi(a)) + (t-a)\,\varepsilon_1(t)\cdot f'(\varphi(a)) \\ &+ \left[(t-a)\,\varphi'(a) + (t-a)\,\varepsilon_1(t)\right]\cdot\varepsilon_2(\varphi(t)) \end{aligned}$$

soit une expression de la forme

$$f\circ\varphi(t) = f\circ\varphi(a) + (t-a)\,\varphi'(a)\cdot f'[\varphi(a)] + (t-a)\,\varepsilon_3(t) \text{ avec } \lim_{t\to a}\varepsilon_3(t) = 0$$

ce qui est bien un développement limité d'ordre 1 de $f \circ \varphi$ au voisinage de a, et donne le résultat voulu. □

Remarque 3.4.2. 1. L'énoncé se généralise en modifiant « dérivable en a » par « dérivable sur J ».

4 Dérivées successives

4.1 Définition

Définition 4.1.1.
On construit par récurrence les fonctions suivantes :

- on note $f^{(0)} = f$;
- si $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k-1)}$ existe, alors si de plus $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I, on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$.
  On dit alors que f est k ***fois dérivable***.
  Si de surcroît $f^{(k)}$ est continue, on dit que f est ***de classe*** $\mathscr{C}^k$ ***sur*** I.
- Enfin, si f est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est ***de classe*** $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

On notera $\mathscr{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
On notera $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
On notera $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

4.2 Propriétés et opérations

Proposition 4.2.1 (Fonctions coordonnées)**.**
f est k fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^k$) si et seulement si ses fonctions coordonnées le sont.
Dans ce cas, $f^{(k)} = \begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{pmatrix}$.

Proposition 4.2.2 (Combinaisons linéaires)**.**
$\mathscr{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$, $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R}^n)$.
De plus, si $f, g \in \mathscr{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$.

Théorème 4.2.3 (Formule de Leibniz)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et B une application bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
Alors $\varphi \ : I \to \mathbb{R}^q$, $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et

$$\forall t \in I,\ \varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t)\right).$$

Théorème 4.2.4.
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi \ : J \to I$ et $f \ : I \to \mathbb{R}^n$, et soit $a \in J$.
Si $\varphi \in \mathscr{C}^k(J, I)$ et $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R}^n)$.

5 Exercices classiques

5.1 Un déterminant

Pour tout réel x, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

5.2 Dérivée et matrice orthogonale

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair, et soit $M \ : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est orthogonale.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M'(t)$ n'est pas inversible.
Qu'en est-il si m est pair ?