XVI. Équations différentielles

I. Méthode de variation de la constante

1) On trouve $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$.

2) Une solution particulière (relativement) évidente est $t \mapsto 1+t^2$.
Cherchons donc les solutions sous la forme $y(t) = K(t)(1+t^2)$.
y est solution ssi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1+t^2)^2 K''(t) + 4(t^2+1)tK'(t) = 0$, ou encore K' est solution de l'équation différentielle $z' + \dfrac{4t}{1+t^2} z = 0$.
Cette dernière équation a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{\lambda}{(1+t^2)^2}$ quand λ parcourt $\mathbb{R}$.
Grâce à la première question, y est solution ssi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $K\ : t \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\left(\arctan t + \dfrac{t}{1+t^2}\right) + \mu$. Finalement l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\big((1+t^2)\arctan t + t\big) + \mu(1+t^2) \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) Nous avons résolu l'équation homogène associée. Une solution évidente de l'équation avec second membre est la fonction $t \mapsto -\dfrac{t}{2}$, donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\big((1+t^2)\arctan t + t\big) + \mu(1+t^2) - \dfrac{t}{2} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

II. Un raccordement de solutions (banque CCINP MP)

1) On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0,+\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0,+\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.

2) On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0,+\infty[$.
On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3) On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0,+\infty[$.
Alors f est aussi solution de E sur $]0,+\infty]$.
Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
De plus, comme f est solution de E sur $[0,+\infty[$ alors f est dérivable sur $[0,+\infty[$.
Donc en particulier, f est continue en 0.
Donc $f(0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 0$.
f doit également être dérivable en 0.
Or, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
Donc f n'est pas dérivable en 0.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$ est l'ensemble vide.

III. Un système différentiel linéaire

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle

$$X' = AX \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}, E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour } P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.

$$Y' = DY \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

IV. Un changement de fonction

Comme le suggère l'énoncé, pour $y \; : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, considérons $z = \left(x^2+1\right) y$, qui est deux fois dérivable.
Comme (E) commence par $\left(x^2+1\right) y''$, calculons z' et z''. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(x^2+1\right) y(x), \quad z'(x) = 2xy(x) + \left(x^2+1\right) y'(x) \\ z''(x) &= 2y(x) + 4xy'(x) + \left(x^2+1\right) y''(x) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\left(x^2+1\right) y''(x) - \left(3x^2-4x+3\right) y'(x) + \left(2x^2-6x+4\right) y(x) \\ =&\left(z''(x) - 2y - 4xy'(x)\right) - \left(3x^2-4x+3\right) y'(x) + \left(2x^2-6x+4\right) y(x) \\ =&z''(x) - 3\left(x^2+1\right) y'(x) + \left(2x^2-6x+2\right) y(x) \\ =&z''(x) - 3\left(z'(x) - 2xy(x)\right) + \left(2x^2-6x+2\right) y(x) \\ =&z''(x) - 3z'(x) + 2z(x) \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si z est solution de : (F) $\quad z'' - 3z' + 2z = 0$.

(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solutions réelles 1 et 2 , donc, d'après le cours, la solution générale de (F) est :

$$z : x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On conclut que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x}}{x^2+1}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$