

XVII – Endomorphismes d’une espace vectoriel euclidien

I. Endomorphismes préservant l’orthogonalité

- 1) $(u + v \mid u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ pour u et v unitaires.
- 2) Soient u et v des vecteurs unitaires de E . $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux donc $f(u + v)$ et $f(u - v)$ le sont aussi. Or par linéarité

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ et } f(u - v) = f(u) - f(v)$$

de sorte que l’orthogonalité de ces deux vecteurs entraîne

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

Ainsi les vecteurs unitaires de E sont envoyés par f sur des vecteurs ayant tous la même norme $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Montrons qu’alors

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

Soit $x \in E$.

Si $x = 0$ alors on a $f(x) = 0$ puis $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

Si $x \neq 0$ alors en introduisant le vecteur unitaire $u = x/\|x\|$, on a $\|f(u)\| = \alpha$ puis $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$

- 3) Si $\alpha = 0$ alors $f = \tilde{0}$ et n’importe quel $g \in O(E)$ convient.
Si $\alpha \neq 0$ alors introduisons l’endomorphisme

$$g = \frac{1}{\alpha} f$$

La relation obtenue en **2)** assure que g conserve la norme et donc $g \in O(E)$ ce qui permet de conclure.

II. Matrices orthogonales et inégalités

- 1) Avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n et u l’endomorphisme canonique associé à A , si $e = e_1 + \dots + e_n$ alors $\sum_{i,j} a_{i,j} = \langle u(e), e \rangle$, pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . Puis on conclut en utilisant l’inégalité de Cauchy-Schwarz.

- 2) Pour tout j , $\sum_i a_{i,j}^2 = 1$ donc pour tout i $a_{i,j}^2 \leq 1$, donc $|a_{i,j}| \leq 1$ donc $\sum_{i,j} |a_{i,j}| \geq \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$.

- 3) $\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{i,j} |a_{i,j}| \times 1 = \langle |A|, J \rangle$ pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $|A| = (|a_{i,j}|)$. Alors, toujours avec l’inégalité de Cauchy-Schwarz, $\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leq$

$$\sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \sqrt{\sum_{i,j} 1^2} \leq n\sqrt{n}.$$

- 4) On peut avoir l’égalité si $n = 1$ mais aussi si $n = 4$ avec

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En fait, un approfondissement du problème donne $\sqrt{n} \in 2\mathbb{Z}$ comme condition nécessaire à l’obtention de l’égalité.

Pour avoir égalité dans l’inégalité de Cauchy-Schwarz de la question **1)**, il faut que tous les coefficients de A soient de même valeur absolue λ . Et donc en faisant la somme des $|a_{i,j}|$ on obtient $n^2\lambda = n\sqrt{n}$ donc $\lambda = 1/\sqrt{n}$.

Pour l’inégalité de Cauchy-Schwarz de la question **3)**, il faut que la somme de tous les coefficients d’une ligne vaille une constante. Cette constante doit valoir 1 pour que la somme de tous les coefficients vaille n . Si on appelle a le nombre de $+$ sur une ligne, on doit donc avoir $(a - (n - a))\sqrt{n} = 1$, donc $2a = n + \sqrt{n}$. Donc n doit être un carré parfait.

Enfin les colonnes doivent être deux à deux orthogonales, donc le nombre de $+$, a , doit avoir la même parité que n (je ne sais pas trop le montrer rigoureusement :)) donc n doit être pair.

III. Matrices symétriques positives

On introduit, sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$, associée au produit scalaire canonique, définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = \sqrt{X^T X}$.

1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

Raisonnons par double implication.

Supposons que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Prouvons que $\text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} / AX = \lambda X$.

Alors $X^T AX = X^T \lambda X = \lambda \|X\|^2$.

Or, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $X^T AX \geq 0$.

Donc $\lambda \|X\|^2 \geq 0$.

Or, $X \neq 0$ donc $\|X\|^2 > 0$.

Donc $\lambda \geq 0$.

Supposons que $\text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

Prouvons que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, $\exists P \in \text{O}(n) / A = PDP^T$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$X^T AX = X^T PDP^T X = (P^T X)^T D (P^T X)$.

Notons y_1, y_2, \dots, y_n les composantes de la matrice colonne $Y = P^T X$.

$$\text{Ainsi } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et donc } X^T AX = Y^T DY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2. \quad (1)$$

Or, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A donc, par hypothèse, $\forall i \in [1, n], \lambda_i \geq 0$.

Donc $\forall i \in [1, n], \lambda_i y_i^2 \geq 0$.

Donc, d'après (1), $X^T AX \geq 0$.

2) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Prouvons que $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$(A^2)^T = A^T A^T$.

Or, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$. Donc $(A^2)^T = A^2$. Donc $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$X^T A^2 X = X^T A^T A X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2 \geq 0$.

Donc $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3) soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On suppose que $AB = BA$.

Prouvons que $A^2 B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Remarque : par hypothèse, A et B commutent donc A^2 et B commutent.

En effet : $A^2 B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2$.

$(A^2 B)^T = B^T (A^2)^T = B^2 (A^T)^2$.

Or, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $A^T = A$ et $B^T = B$.

Donc $(A^2 B)^T = BA^2$.

Or, d'après la remarque, A^2 et B commutent.

Donc $(A^2 B)^T = A^2 B$.

Donc $A^2 B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

A et B commutent donc $X^T (A^2 B) X = X^T A B A X$.

Or, A est symétrique donc $X^T A B A X = (AX)^T B (AX)$.

On pose $Y = AX$.

$Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $(AX)^T B (AX) = Y^T B Y \geq 0$.

Donc $X^T A^2 B X \geq 0$.

Donc $A^2 B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

IV. Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Existence : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T D P$, où $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et les $d_i \in \mathbb{R}_+$. Posons $B = P^T D' P$ avec $D' = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$. Alors $B^2 = A$.

Unicité :

1ère méthode : Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A . A est diagonalisable, donc $E = \mathbb{R}^n$ est la somme directe des espaces propres de A . Soit F un espace propre associé à une valeur propre d , et soit B telle que $B^2 = A$, représentant l'endomorphisme g .

Alors A et B commutent, donc F est stable par B . Notons $h = f|_F$. Alors h est aussi symétrique positive réelle et donc elle est diagonalisable. Ses valeurs propres sont positives, mais puisque $h^2 = d \text{Id}$, alors ces valeurs propres valent toutes \sqrt{d} . Donc $h = \sqrt{d} \text{Id}$. f est donc définie de manière unique sur chaque sous-espace propre. Ces derniers étant supplémentaires, f est définie de manière unique.

2ème méthode :

Soient R et S deux racines, on note $V = \text{Sp}(R) \cup \text{Sp}(S)$, et on appelle v_1, \dots, v_p ses éléments, nommés injectivement. Comme elles sont positives, alors les v_1^2, \dots, v_p^2 sont deux à deux distinctes. On note L le polynôme d'interpolation qui envoie les v_i^2 sur les v_i .

Si on note $R = Q^T \Delta Q$ avec Q inversible et Δ diagonale, les coefficients diagonaux de Δ sont dans V . Alors $L(A) = L(R^2) = Q^T L(\Delta^2) Q = Q^T L(\Delta) Q = R$. Et de même $L(A) = S$, donc $R = S$.

3ème méthode :

Si $B_1 = P_1^T D_1 P_1$ et $B_2 = P_2^T D_2 P_2$ sont deux racines carrées (convenablement diagonalisées), alors l'égalité $B_1^2 = B_2^2$ entraîne $D_1^2 Q - Q D_2^2 = 0$ avec $Q = P_1 P_2^T$. En termes de coefficients, cela donne

$$\begin{aligned} 0 &= [D_1^2 Q - Q D_2^2]_{i,j} = [D_1]_{i,i}^2 [Q]_{i,j} - [D_2]_{j,j}^2 [Q]_{i,j} \\ &= [Q]_{i,j} \left([D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j} \right) \left([D_1]_{i,i} + [D_2]_{j,j} \right) \end{aligned}$$

Or on a $[D_1]_{i,i} > 0$ et $[D_2]_{j,j} > 0$. Ce qui fournit $[Q]_{i,j} \left([D_1]_{i,i} - [D_2]_{j,j} \right) = 0$, c'est-à-dire $[D_1 Q - Q D_2]_{i,j} = 0$ ou encore $D_1 Q - Q D_2 = 0$ et enfin $B_1 - B_2 = 0$. Autrement dit, les endomorphismes matriciels $Q \mapsto D_1^2 Q - Q D_2^2$ et $Q \mapsto D_1 Q - Q D_2$ ont le même noyau dès lors que D_1 et D_2 sont deux matrices diagonales à valeurs propres strictement positives !

V. Décomposition polaire

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

- 1) $(A^T A)^T = A^T A$ dont $A^T A$ est symétrique.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Alors $X^T (A^T A) X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2$.
Mais $X \neq 0$ et A est inversible donc $\|AX\|^2 > 0$, donc $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}$.
- 2) On nous rappelle qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $A^T A = S^2$.
Notons $\Omega = AS^{-1}$. On a alors $A = \Omega S$, et :

$$\Omega^T \Omega = (AS^{-1})^T AS^{-1} = (S^{-1})^T (A^T A) S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

donc $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. Ceci montre l'existence d'un couple (Ω, S) convenant.