

Intégrales généralisées

I. Intégrales de Wallis

- 1) $I_0 = \pi/2$; $I_1 = 1$ et $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, d'où
 n pair , $n = 2p$, alors par récurrence $I_n = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$
 $n = 2p + 1$ alors par récurrence $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!(2p+1)}$.
- 2) $I_{n+1} - I_n \leq 0$ est clair. De plus $t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive, et prend une valeur strictement positive, donc $I_n > 0$.
D'où $\frac{I_{n-1}}{I_n} \geq 1$ et $\frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$ et donc $\lim \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$.
- 3) Soit $u_n = nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-2} I_{n-1} = u_{n-1}$ donc la suite (u_n) est constante égale à $u_1 = \frac{\pi}{2}$.
d'où $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ et donc $\sqrt{n}I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- 4) $\lim(nI_n^2) = \frac{\pi}{2}$ d'où $\lim(2nI_{2n}^2) = \frac{\pi}{2}$ et en combinant avec la question 1), on obtient la formule de Wallis.

II. Détermination de la nature d'une intégrale

III. Intégration par parties et équivalent

- 1) Pas de problème d'intégrabilité en 1. En $+\infty$, $\frac{1}{x^n(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^{n+2}}$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, I_n converge.
- 2) $0 \leq \frac{1}{x^n(1+x^2)} \leq \frac{1}{x^{n+2}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}} dx = \left[-\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n+1}$, donc par encadrement, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- 3) On a, par une intégration par parties pour des applications de classe \mathcal{C}^1 , pour tout $X \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{1}{x^n(1+x^2)} dx &= \int_1^X x^{-n} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \frac{1}{1+x^2} \right]_1^X - \int_1^X \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{X^{-n+1}}{-n+1} \frac{1}{1+X^2} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2}{n-1} \int_1^X \frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

On déduit, en faisant tendre X vers $+\infty$:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{2}{n-1} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x^{-n+2}}{(1+x^2)^2} dx}_{\text{notée } J_n}$$

On a, pour $n \geq 4$:

$$0 \leq J_n \leq \int_1^{+\infty} x^{-n+2} dx = \left[\frac{x^{-n+3}}{-n+3} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{n-3}$$

donc : $J_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, puis :

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2(n-1)} \sim \frac{1}{2n}$$

IV. Intégrabilité de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

- 1) En 0 : prolongeable par continuité. En $+\infty$: On pose $f(t) = 1 - \cos(t)$ et $g(t) = \frac{1}{t}$. Alors d'une part $fg \rightarrow 0$ en $+\infty$, donc par IPP $\int_0^{+\infty} f'g$ et $\int_0^{+\infty} fg'$ ont même nature. Et d'autre part $f(t)g'(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc fg' est intégrable en $+\infty$. Puisque $\int_0^{+\infty} f'g = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, on obtient la convergence voulue.
- 2) On continue l'IPP :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

Or il y a convergence des deux termes en second membre donc il y a convergence de l'intégrale en premier membre et on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

Puisque $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} 2 \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt$$

Enfin par le changement de variable $u = t/2$ sous-jacente à une bijection de classe \mathcal{C}^1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$$

3) $2 \sin^2 t = 1 - \cos(2t)$. Comme dans la question précédente on montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \text{ converge, mais } \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t} dt \text{ diverge.}$$

4) On observe que $|\sin t| \geq \sin^2 t$.