III. Intégrales généralisées

31 octobre 2024

Table des matières

Programme officiel

Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Si f est continue, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
– si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
– si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.	
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$.	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 1.0.1 (Fonction continue par morceaux sur un segment)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $n + 1$ réels $x_0 \dots x_n$ tels que :

1. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
2. pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1}.

L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$ est appelé une *subdivision* de $[a, b]$*adaptée* à f.
On note $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors avec les lois $+, .$ $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ est un sev de $\mathbb{K}^{[a,b]}$, et avec les lois $+, \times$ c'est un sous-anneau (autrement dit il contient la fonction constante égale à 1, et il est stable par produit).

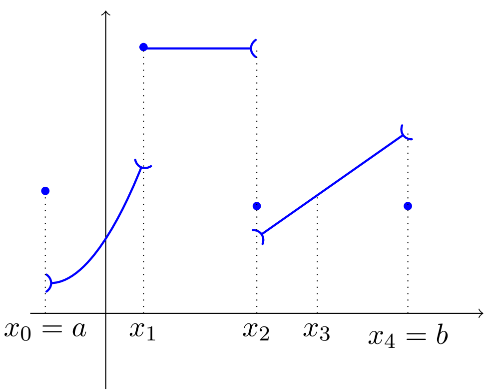


FIGURE 1 – Illustration de la définition d'une fonction continue par morceaux.

Exemple 1.0.2.
Si n et m sont deux entiers relatifs, la fonction partie entière est continue par morceaux sur $[n, m]$.

Remarque 1.0.3.
1. Attention aux valeurs prises aux points de la subdivision : elles peuvent valoir n'importe quoi ;
2. Une fonction continue est continue par morceaux, et $[a, b]$ est alors une subdivision adaptée ;
3. Une fonction continue par morceaux doit avoir une limite finie à gauche et à droite en tout point d'une subdivision adaptée. Ainsi f définie sur $[0, \pi]$ telle que $f(\pi/2) = 0$ et $f(x) = \tan x$ si $x \neq \pi/2$ n'est pas continue par moceaux.

Remarque 1.0.4.
Si S et T sont deux subdivisions de $[a, b]$, alors :

1. Si S est adaptée à une fonction continue par morceaux f et $S \subset T$, alors T est adaptée à f.
2. Si S et T sont des subdivisions adaptées à des fonctions continues par morceaux respectivement f et g, alors $S \cup T$ est adaptée à la fois à f et à g.

Définition 1.0.5 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ et $\{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision adaptée. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note φ_k la fonction égale à $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$, prolongée par continuité en x_k et x_{k+1}.
On pose alors

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k.$$

Remarque 1.0.6.
Changer les valeurs de f en les points de la subdivision ne change pas son intégrale.

Cette intégrale vérifie les mêmes propriétés que celle des fonctions continues, à savoir :

Proposition 1.0.7 (Propriétés de l'intégrale)**.**
Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (f+\lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.
2. Positivité : $f \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
3. Croissance : $f \geqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.
4. Continuité (ou inégalité triangulaire) : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
5. Inégalité de la moyenne :
   $\displaystyle\left|\int_a^b (fg)\right| \leqslant (\sup_{[a,b]} |f|) \times \int_a^b |g|$.
   Cas particulier :
   $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]} |f|$.
6. Relation de Chasles :
   si $c \in]a,b[$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
7. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Sans l'hypothèse de continuité, on peut trouver f telle que f est continue par morceaux, $f \geqslant 0$, f prend des valeurs strictement positives, et malgrè tout $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Considérer par exemple la fonction valant 0 sur $[-1,1]$ sauf en 0 où elle vaut 1.

Exercice 1.0.8.
Calculer $\displaystyle\int_0^2 (t - \lfloor t \rfloor)\,\mathrm{d}t$.

2. Rappels de première année

Dans ces rappels, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1. Le théorème fondamental

a. Primitives

Définition 2.1.1 (Primitive d'une fonction)**.**
Soit f une application de I dans $\mathbb{K}$. On appelle primitive de f sur I toute application $F \in \mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ telle que $F' = f$.

Théorème 2.1.2 (Ensemble des primitives)**.**
Si $f : I \to \mathbb{K}$ a une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f est $\{\, F + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{K} \,\}$.

Remarque 2.1.3.
Il ne faut donc JAMAIS parler de LA primitive de f.

Remarque 2.1.4. — Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, on notera $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale de f de a à b : cette quantité est un scalaire (un réel ou un complexe).

— Si f admet une primitive, les notations $\displaystyle\int f$ ou $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ désigneront une primitive de f, n'importe laquelle. Par exemple $\displaystyle\int \cos = \sin$ et $\displaystyle\int \cos = \sin + 1$ sont toutes deux valables.
Si on veut écrire une primitive en l'exprimant en fonction d'une variable x, on écrira $\displaystyle\int^x f = F(x)$ ou $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$, mais

surtout pas $\int^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ qui n'a aucun sens. La notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ est fréquente et acceptée mais peut être ambigüe et nous essaierons de l'éviter. Par exemple : $\int^x \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Ou encore $\int^u \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(2u)$.

— Les variables étant muettes, $\int^x \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int^x \cos(2u)\,\mathrm{d}u$.

— Le symbole $\int$ utilisé pour désigner une intégrale ou une primitive est trompeur. Les deux objets ne sont pas les mêmes : une intégrale est un nombre (réel ou complexe), une primitive est une fonction. Il existe un lien entre ces deux notions, que nous allons préciser dans le théorème fondamental qui suit, mais il est bon de penser qu'elles sont tout à fait différentes.

Exemple 2.1.5.
Posons

$$f : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Par l'absurde supposons que f admet une primitive F. Alors $F' = 0$ sur $[-1,0[$ et $]0,1]$, donc $F = a$ sur $[-1,0[$ et b sur $]0,1]$. Mais F est dérivable donc continue, donc les limites à gauche et à droite en 0 doivent être égales, i.e. $a = b$. Mais alors F est constante sur $[-1,1]$, donc F' est nulle partout, et ainsi $F' \neq f$.

En revanche, cette fonction a une **intégrale**, et l'application

$$F : \begin{array}{ccl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie.

b. Existence de primitives.

Remarque 2.1.6.
Comme nous l'avons vu dans l'exemple **2.1.5**, les fonctions n'ont pas toutes une primitive.

Théorème 2.1.7 (Théorème fondamental du calcul différentiel)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$, et $a \in I$.

1. f a une primitive, par exemple la fonction $F : \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.
2. Soit $A \in \mathbb{K}$. Alors f admet une unique primitive valant A en a. Il s'agit de la fonction
$$F : \begin{array}{ccl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + A \end{array}.$$
3. Soient $a, b \in I$ et $\tilde{F}$ une primitive de f sur I. Alors $\int_a^b f = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Cette quantité est aussi notée $[\tilde{F}]_a^b$, ou $[\tilde{F}(t)]_{t=a}^b$.

Remarque 2.1.8.
C'est souvent le deuxième ou le troisième point que l'on appelle théorème fondamental du calcul différentiel, mais en fait le point le plus important est le premier, les deux autres en découlent facilement.
Une fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est parfois appelée ***intégrale fonction de la borne du haut***.

c. Fonctions dont la variable intervient dans les bornes d'une intégrale (cas particulier d'intégrales dépendant d'un paramètre).

Théorème 2.1.9.
Soit $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^1(I, J)$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{K})$. Alors la fonction

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{l} \psi'(x) \times (f \circ \psi)(x) \\ -\varphi'(x) \times (f \circ \varphi)(x) \end{array} \end{array} \right. .$$

Démonstration.
f étant continue, elle admet une primitive F. On a alors, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \, \mathrm{d}t = F(\psi(x)) - F(\varphi(x)) \\ &= F \circ \psi(x) - F \circ \varphi(x). \end{aligned}$$

Mais F, ψ et φ étant de classe $\mathscr{C}^1$, Γ l'est aussi et on a

$$\begin{aligned} \Gamma' &= (F \circ \psi - F \circ \varphi)' \\ &= \psi' \times (F' \circ \psi) - \varphi' \times (F' \circ \varphi) \\ &= \psi' \times (f \circ \psi) - \varphi' \times (f \circ \varphi) \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

□

Exercice 2.1.10.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $x \mapsto \displaystyle\int_{3x}^{\cos x} f(t) \, \mathrm{d}t$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

Que penser des écritures $x \mapsto \displaystyle\int_{3x}^{\cos x} f$? Et $x \mapsto \displaystyle\int_{3x}^{\cos x} f(t)$? Et $x \mapsto \displaystyle\int_{3x}^{\cos x} f(x) \, \mathrm{d}x$?

2.2. Intégration par parties

Théorème 2.2.1 (Intégration par parties)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Démonstration.
Puisque u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$, $(uv)' = u'v + uv'$ est continue, donc par le théorème fondamental du calcul intégral :

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + uv' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'.$$

□

Exemple 2.2.2 (Grands classiques)**.**
Toutes ces exemples se résolvent par intégration par parties.
• Trouver une primitive de ln.
• Trouver une primitive de Arctan.
• Trouver une primitive du produit d'un polynôme et d'une exponentielle.
• Trouver une primitive du produit d'une fonction trigonométrique et d'une exponentielle.
• Trouver une primitive du produit d'un polynôme et d'une fonction trigonométrique.

Exemple 2.2.3.
$\displaystyle\int^x t\mathrm{e}^{2t} \, \mathrm{d}t \underset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2} x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2} \int^x \mathrm{e}^{2t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4} \mathrm{e}^{2x}.$

Exercice 2.2.4.
Déterminer des primitives des fonctions suivantes : $x \mapsto (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$, $x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^{2x}$, $x \mapsto x^2 \cos x$.

2.3. Changements de variable

Théorème 2.3.1 (Changement de variable)**.**
Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{K})$

On suppose que $\varphi(I) \subset J$. Alors,

1. Version « intégrale » :
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(t) \cdot (f \circ \varphi)(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Version « primitive » :
$$\int^{\varphi(u)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int^u \varphi'(t) \cdot (f \circ \varphi)(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable « $x = \varphi(t)$ ».

Démonstration.
f est continue sur I, donc y admet une primitive F. Ainsi, F est $\mathscr{C}^1$, comme $\varphi \in \mathscr{C}^1$. On voit que $F \circ \varphi$ est $\mathscr{C}^1$, et $(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f \circ \varphi$ est continue.

On déduit alors le résultat du théorème fondamental (utilisé deux fois) :
$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= [F \circ \varphi]_a^b \\
&= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
$\square$

Remarque 2.3.2.
On essaiera de se ramener systématiquement à cette formule, en introduisant proprement les fonctions φ et f. On évitera les rédactions à base de « soit $x = \varphi(t)$ alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et on remplace, et on voit en bidouillant un peu que les bornes deviennent ceci cela ». Ces raisonnements fonctionnent mais ne sont en aucune manière plus rapides ou plus clairs. Le correcteur favorisera toujours l'utilisation du théorème du cours.

Si les fonctions utilisées sont des fonctions usuelles, il ne sera pas nécessaires d'énoncer les hypothèses de régularité : profitez-en, mais vérifiez-les tout de même dans votre tête.

Exemple 2.3.3.
Calculons $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$. On remarque que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{2}{1 + (\sqrt{t})^2}$. Posons-donc $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$ et $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1 + x^2}$. Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = \varphi'(t) \times f(\varphi(t))$. Alors, par changement de variable on a
$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(3)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\,[\mathrm{Arctan}(x)]_{x=1}^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.4.
Calculons une primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\,t} + \mathrm{e}^{-t}} = \mathrm{e}^{\,t} \times \dfrac{2}{(\mathrm{e}^{\,t})^2 + 1}$. En posant $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\,t}$ nous avons donc :
$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t} &= \int^{\varphi(x)} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2 + 1} \\
&= [2\arctan u]^{u=\varphi(x)} \\
&= 2\arctan(\mathrm{e}^{\,x}).
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.5.
Calculons l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (voir figure 2).

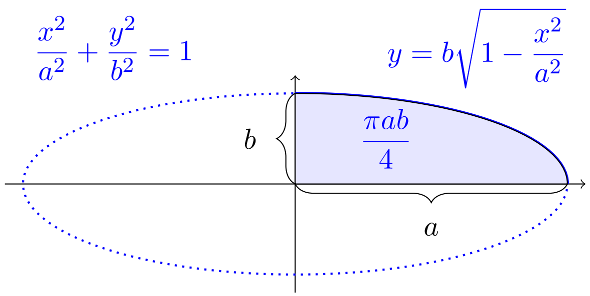


FIGURE 2 – Ellipse de demi-axes a et b.

Le quart supérieur droit de cette ellipse peut être paramétré par $\left(x, b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)$, x allant de 0 à a. On calcule donc $I=\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$.

Un changement de variable usuel dans cette situation est $x=\varphi(\theta)=a\cos\theta$. En effet, si $x\in[0,a]$ il existe $\theta\in[0,\pi/2]$ tel que $x=a\cos\theta$ et alors si $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$,

$$\begin{aligned} f(\varphi(\theta)) &= \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2(\theta)} \\ &= |\sin(\theta)| = \sin\theta \quad \text{car } \theta\in[0,\pi/2]. \end{aligned}$$

Alors par changement de variable :

$$\begin{aligned} I &= b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = b\int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= b\int_{\pi/2}^{0} \varphi'(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\pi ab - \frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4}\pi ab. \end{aligned}$$

L'aire de l'ellipse est donc πab.

3. Extension aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 3.0.1 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$)**.**
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur I, on dit que f est ***continue par morceaux*** sur I lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I sera noté $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$.

Remarque 3.0.2.
$\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $\mathbb{K}^I$, et aussi un sous-anneau.

Le théorème fondamental s'adapte de la manière suivante aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle :

Théorème 3.0.3 (Intégrale fonction de la borne du haut)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.
On définit l'intégrale ***fonction de la borne du haut*** $F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f \end{array}$.

Alors :

1. F est continue sur I ;
2. F est dérivable à droite et à gauche en tout point de I où cela a un sens (attention aux bornes) ;
3. si f est continue en un point $x_0 \in I$, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

4. Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Dans cette section, nous fixerons un réel a, et $f \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

4.1. Définition

Définition 4.1.1 (Intégrale convergente)**.**
L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est appelée ***intégrale généralisée*** (ou encore ***intégrale impropre***).
Elle est dite ***convergente*** si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie ℓ en $+\infty$.
Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \ell$.
Dans le cas contraire, cette intégrale ***diverge***.

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est donc une limite. En tant que telle, il faut donc bien s'assurer de son existence avant d'écrire $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Exemple 4.1.2.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. En effet, si $\alpha \neq 1$, soit $x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)$. Et si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x$.

Exercice 4.1.3.
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$

Remarque 4.1.4.
Dans les exemples précédents, nous sommes souvent revenus à un intervalle $[a, x]$ et avons pu calculer une primitive. Ce ne sera pas souvent le cas, et nous verrons plus tard d'autres outils pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée, notamment des outils de comparaison comme pour les séries. Les fonctions de l'exemple **4.1.2** sont les intégrales de Riemann, faisant partie des intégrales étalon de référence.

Remarque 4.1.5. — Les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [a, +\infty[$, s'appellent ***intégrales partielles*** de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$;

— Lorsque $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, les intégrales $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ s'appellent ***restes*** de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$;

— Étudier la ***nature*** d'une intégrale, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente ;

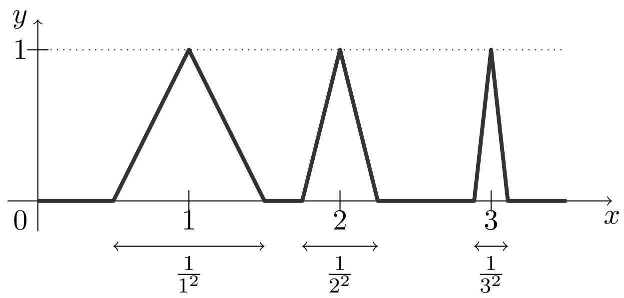
— Deux intégrales généralisées sont dites ***de même nature*** lorsqu'elles sont toutes les convergentes ou toutes les deux divergentes ;

— La fonction f étant continue sur tout segment inclus dans $[a, +\infty[$, si $b \in [a, +\infty[$ la nature de l'intégrale $\int_b^{+\infty} f$ ne dépend pas de la borne du bas.

On notera les similitudes avec le vocabulaire des séries.

⚠ Il existe beaucoup de similitudes entre la théorie des séries et celle des intégrales généralisées. Cependant, tout ne se généralise pas, et on fera attention à ne pas calquer aveuglément les résultats sur les séries sur les intégrales.

Exercice 4.1.6.
Voici une fonction définie par son graphe :



Étudier son intégrabilité. Quel résultat fondamental sur les séries est ici mis en défaut ?

Théorème 4.1.7 (Reste d'une intégrale convergente)**.**
Supposons que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors pour tout $x \in [a, +\infty\,[$, le reste $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Remarque 4.1.8.
Important. Si f est continue sur $[a, +\infty\,[$, alors la fonction $F : x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty\,[$ et pour $x \geqslant a$: $F'(x) = -f(x)$.

4.2. Cas des fonctions positives

Théorème 4.2.1 (Cas d'une fonction positive)**.**
Si $f\ : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux et positive, alors on équivalence de :

(i) $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

(ii) la fonction $x \longmapsto \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Dans ce cas $\forall\, x, y \in [a, +\infty[$, si $x \leqslant y$ alors $\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{y} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 4.2.2.
Soit $f, g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[)$ deux fonctions positives telle que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge également.

4.3. Cas général

Théorème 4.3.1 (Cas d'une fonction à valeurs complexes)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{C})$.

1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

2. On a équivalence entre :
   (i) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
   (ii) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent.

   Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = &\int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t \\ &+ i\int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   donc :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{+\infty} \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t$$
$$\text{et}\quad \mathrm{Im}\left(\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^{+\infty} \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.3.2.
Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

5. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Dans cette section $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. On notera I un intervalle d'extrémités a et b.
Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$, alors I est un segment.
Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, I est de la forme étudiée dans la section précédente.
Nous allons maintenant traiter les autres cas : soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Lorsque $I =]-\infty, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to -\infty-$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I = [a, b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to b^-$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \to a^+$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale est doublement généralisée. Prenant c tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si

$\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.
La nature de cette intégrale ne dépend pas du choix de c, par continuité par morceaux de f sur $]a,b[$.
Ce dernier cas s'adapte si $a=-\infty$ ou $b=+\infty$.

Dans tous ces cas $\displaystyle\int_a^b f$ pourra être notée $\displaystyle\int_I f$.

Remarque 5.0.1.

- Si $a,b\in\mathbb{R}$ et $I=[a,b]$, alors f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$. La notation $\displaystyle\int_a^b f$ peut alors désigner $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_{]a,b]} f$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ et $\displaystyle\int_{]a,b[} f$. On peut alors vérifier que ces quatre intégrales sont égales, et ainsi la notation $\displaystyle\int_a^b f$ ne pose pas de problème.
- Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ mais qu'elle a une limite finie en b, elle est alors prolongebale en b en une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est alors qualifiée de ***faussement généralisée*** ou ***faussement impropre***.
On a les mêmes résultats à adapter sur $]a,b[$ et $]a,b]$ si f a des limites finies aux bornes.
- Le résultat de **4.1.7** s'adapte aux intervalles quelconques. Par exemple si $I=[a,b[$, il suffit dans l'énoncé de remplacer $+\infty$ par b.

6. Propriétés

Remarque 6.0.1.
On conviendra que si $\displaystyle\int_a^b f$ converge alors $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Théorème 6.0.2 (Propriété des intégrales convergentes)**.**
Soit $f,g\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ telles que $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent.

1. Linéarité : soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, alors $\displaystyle\int_I(\lambda f+\mu g)$ converge et $\displaystyle\int_I(\lambda f+\mu g) = \lambda\int_I f+\mu\int_I g$.
2. Corollaire : si $h\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ et $\displaystyle\int_I h$ diverge, alors $\displaystyle\int_I f+h$ diverge.
3. Positivité : si $f\geqslant 0$ sur I alors $\displaystyle\int_I f\geqslant 0$.
4. Croissance : si $f\leqslant g$ sur I alors $\displaystyle\int_I f\leqslant\int_I g$.
5. Relation de Chasles : on note $\bar{I}=[a,b]$. Soit $a,b,c\in\bar{I}$ (ces trois points sont donc des points ou des bornes de I). Alors $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont convergentes et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f+\int_c^b f$.

7. Méthodes de calcul

7.1. Calcul par primitivation

Si l'on sait calculer une primitive de l'intégrande, les choses sont simples.

Théorème 7.1.1.
Soit $f\in\mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$, de primitive F. Alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si F a une limite finie ℓ en b.
Dans ce cas $\displaystyle\int_a^b f=\ell-F(a)$. Cette dernière quantité pourra être notée $[F]_a^{b^-}$, ou même $[F]_a^b$.
Cet énoncé s'adapte aux cas $]a,b]$ et $]a,b[$.

Exercice 7.1.2.
Étudier et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}$.

7.2. Intégration par parties

Son énoncé est plus subtil que sur un segment. Nous le donnons comme d'habitude sur $[a,b[$ mais il s'adapte sur $]a,b]$ et $]a,b[$.

Théorème 7.2.1 (Intégration par parties)**.**
On suppose que :

1. f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$;
2. fg a une limite finie en b.

Alors

1. $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ ont même nature ;
2. Dans le cas de convergence, $\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^{b^-} - \int_a^b fg'$.

Exercice 7.2.2.
Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

7.3. Changement de variable

Là aussi son énoncé est plus subtil que sur un segment et nous le donnons sur $]a,b[$ pour changer.

Théorème 7.3.1 (Changement de variable)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}_m(]a,b[,\mathbb{K})$. Si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est :

1. une bijection
2. strictement croissante
3. de classe $\mathscr{C}^1$

alors

1. les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
2. elles sont égales en cas de convergence.

Exercice 7.3.2.
Convergence et calcul de :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (on pourra poser le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$).

8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Dans toute la suite, I sera un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, de bornes $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$.

8.1. Définition

Définition 8.1.1 (Fonction intégrable)**.**
On dit que f est ***intégrable*** sur I lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.
On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est ***absolument convergente***, et on pourra alors aussi la noter $\displaystyle\int_I f$.

Remarque 8.1.2.

- Pour les fonctions positives, les notions de convergence et d'absolue convergence coïncident.
- Si $I = [a, b[$, le problème se trouve en b. Si f est intégrable sur I, on dira souvent pour simplifier que f est intégrable en b. De même, si $I =]a, b]$, on dira que f est intégrable en a. Par exemple $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$.

Proposition 8.1.3 (Inégalité triangulaire intégrale)**.**
Si f est intégrable sur I, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge. Autrement dit, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente, elle est convergente. Et on a dans ce cas :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

La réciproque est fausse, considérer l'exercice suivant.

Exercice 8.1.4.
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$. Étudier la convergence et l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

Proposition 8.1.5 (Translation)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b[)$ et $h : x \mapsto f(b + x)$. Ainsi $h \in \mathscr{C}_m([a - b, 0[)$. Alors f est intégrable en b si et seulement si h l'est en 0.

Remarque 8.1.6.
Là encore, on peut donner un énoncé concernant l'intégrabilité en a sur $]a, b]$.

Exercice 8.1.7.
Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}}\, \mathrm{d}t$.

Proposition 8.1.8.
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b[)$, intégrable, positive et donc **continue**. Si $\displaystyle\int_I |f| = 0$, alors f est nulle sur I.

Théorème 8.1.9 (Inégalité triangulaire bis)**.**
Si f et g sont intégrables sur I alors $f + g$ également et $\displaystyle\left|\int_I f + g\right| \leqslant \int_I |f + g| \leqslant \int_I |f| + |g|$.

Démonstration.
$\displaystyle\int_I |f|$ et $\displaystyle\int_I |g|$ convergent par définition, donc $\displaystyle\int_I |f| + |g|$ également par linarité. Mais $|f + g| \leqslant |f| + |g|$ donc par croissance $\displaystyle\int_I |f + g|$ converge et $\displaystyle\int_I |f + g| \leqslant \int_I |f| + |g|$.
Par définition, $f + g$ est intégrable et donc $\displaystyle\left|\int_I f + g\right| \leqslant \int_I |f + g|$. □

Définition 8.1.10.
L'ensemble des fonctions intégrables de I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I, \mathbb{K})$. Muni des lois usuelles + et ., c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

8.2. Un exemple de référence : les intégrales de Riemann

Théorème 8.2.1 (Intégrales de Riemann)**.**

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Soit $a < b$ deux réels et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 8.2.2.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ convergent.

8.3. Théorèmes de comparaison

Théorème 8.3.1 (Inégalités)**.**
Soit $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m(I, \_+)$.
Si g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et est intégrable sur I, et si $|f| \leqslant g$, alors f est intégrable sur I.

Démonstration.
Direct grâce à **4.2.2**. □

Théorème 8.3.2 (Relations de Landau)**.**
Soit $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $I = [a, b[$. Soit $f, g \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable en b et $f =_b O(g)$, alors f est intégrable en b ;
2. Si g est intégrable en b et $f =_b o(g)$, alors f est intégrable en b ;
3. Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable en b si et seulement si g l'est.

Remarque 8.3.3.

- On pourrait énoncer des résultats analogues pour l'intégrabilité en a dans le cas où $I =]a, b]$.
- Attention : dans le théorème précédent, l'absolue convergence des intégrales ne peut pas être remplacée par la convergence, sauf si g est de signe constant.
  Par exemple, en $+\infty$, $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} \sim \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$. On peut montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge. Mais aussi, $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sin^2 x}{x} + O\left(x^{-3/2}\right)$ et $\dfrac{\sin^2 x}{x} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{\cos 2x}{2x}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\,\mathrm{d}x$ diverge.
  Donc, comme pour les séries, ces résultats de comparaison ne s'appliquent pas à des fonctions changeant de signe, sauf si l'on passe au module (ce qui est le cas lorsque l'on parle de fonction intégrable).

Exercice 8.3.4.
Étudier la nature des intégrales suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)\mathrm{d}t$.

Remarque 8.3.5.

- Une fonction intégrable en $+\infty$ tend-elle vers 0 en $+\infty$?
- Si une fonction intégrable en $+\infty$ a une limite en $+\infty$, cette limite est-elle nulle ?

8.4. Étude de l'existence d'une intégrale

Deux questions peuvent être posées : f est-elle intégrable sur I ? Ou : $\displaystyle\int_I f$ existe-t-elle ? Ces deux questions ne sont pas les mêmes !
On répondra en général à ces questions en étudiant l'intégrande, mais rarement en cherchant à calculer cette intégrale, car on saura rarement calculer l'intégrale considérée. Mais si c'est le cas, c'est une possibilité. La méthode de base est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, soit par des inégalités (la plupart du temps sur I) soit par des relations de comparaison au voisinage d'une ou des deux bornes.

Si $I =]a, b[$, on introduira un point $c \in]a, b[$, et on coupe le problème en deux en étudiant séparèment l'existence de $\displaystyle\int_a^c f$ et celle de $\displaystyle\int_c^b f$.

Si I est un segment, il n'y a de toute façon pas de problème : la fonction est toujours intégrable.
Si I est borné et f également, alors par encadrement par des constantes, f est intégrable. Ce cas recouvre le cas où f est prolongeable par continuité aux bornes de I.
Sinon, si f est de signe constant les deux questions sont équivalentes.
Si f n'est pas de signe constant, ces deux questions sont distinctes. Le cas de semi-convergence n'étant pas un attendu du programme, on penchera souvent vers l'étude de l'absolue convergence.

9. Exercices classiques

9.1. Intégrales de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
   Pour tout $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
   En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n selon la parité de n.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$.
3. Montrer : $\forall n \geqslant 1, \quad nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}$.
4. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n(I_{2n})^2 = \frac{\pi}{2}$.
   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[n\left(\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2\right] = \frac{1}{\pi}$ (**formule de Wallis**).

9.2. Détermination de la nature d'une intégrale

Préciser la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$ (et la calculer).

9.3. Intégration par parties et équivalent

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer l'existence de I_n, pour tout n.
2. Déterminer la limite de $(I_n)_n$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

9.4. Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.
4. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?