

Intégrales dépendant d'un paramètre

I. La fonction Γ (banque CCINP MP)

1) Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de

Riemann avec $1 - x < 1$).

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(x, t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$,

$$f(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Par intégration par parties, justifiée ci-après $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt =$

$$[-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt.$$

Le crochet possède des limites finies à ses bornes par croissances comparées, et est de valeur nulle, ce qui valide ce calcul et donne

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3) i) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après la question 1.).

ii) $\forall t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et $\forall (x, t) \in]0, +\infty[^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)e^{-t}t^{x-1}$.

iii) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

iv) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

v) Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

En effet :

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t|t^{a-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{a}{2}}|\ln t| = 0.$$

Donc, au voisinage de 0^+ , $\varphi_1(t) = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1 - \frac{a}{2} < 1$).

Donc, φ_1 est intégrable sur $]0, 1[$.

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0.$$

Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^{x-1} dt$.

II. Produit de convolution

- 1) Soit f une fonction continue T -périodique, avec $T > 0$.
 Soit $y \in f(\mathbb{R})$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.
 Posons $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$. Alors $x = kT + (x - kT)$. Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors $y = f(x) = f(x - kT)$.
 Mais $k \leq \frac{x}{T} < k + 1$ donc $0 \leq x - kT < T$, et ainsi $y \in f([0, T])$. Et donc $f(\mathbb{R}) \subset f([0, T])$.
 Mais f est continue et $[0, T]$ est un segment, donc $f([0, T])$ est un ensemble borné, donc $f(\mathbb{R})$ aussi.
- 2) Pour tout réel x , $f * g(x)$ est définie comme intégrale sur un segment d'une fonction continue. Une fonction continue 2π -périodique est bornée. Donc on peut majorer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |(f * g)(x)| \leq 2\pi N_\infty(f)N_\infty(g),$$

ce qui permet de dire que $f * g$ est bornée et $N_\infty(f * g) \leq 2\pi N_\infty(f)N_\infty(g)$.

- 3) La 2π -périodicité de $f * g$ résulte immédiatement de celle de f .
 Il s'agit ensuite de montrer que, si f et g sont continues, $f * g$ l'est.
 Définissons $\varphi : (x, t) \mapsto f(x - t)g(t)$ sur $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$. Elle est continue par rapport à chacune de ses variables, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \quad |\varphi(x, t)| \leq N_\infty(f)N_\infty(g).$$

Or la fonction $t \mapsto N_\infty(f)N_\infty(g)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ (la continuité par morceaux suffirait), intégrable sur ce segment. Le théorème de continuité sous le signe \int permet alors de conclure.

- 4) Nous avons

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t)dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)du \quad (\text{changement de variable } t = x - u). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)du &= \int_{x-\pi}^{-\pi} f(u)g(x - u)du + \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x - u)du \\ &\quad + \int_{\pi}^{x+\pi} f(u)g(x - u)du \end{aligned}$$

et, en faisant le changement de variable $v = u + 2\pi, u = v - 2\pi$ dans la première intégrale, tenant compte de la 2π -périodicité de f et g , on obtient finalement

$$f * g = g * f.$$

5)

$$\begin{aligned} (e_k * e_l)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)}e^{ilt}dt \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t}dt \right) e_k(x) \end{aligned}$$

Si $k = l$, on obtient $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t}dt = 2\pi$.

Si $k \neq l$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t}dt = \left[\frac{1}{i(l-k)} e^{i(l-k)t} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Finalement $e_k * e_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 2\pi e_k & \text{si } k = l \end{cases}$.

III. L'intégrale de Gauss

- 1) On pose $f = F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ . Donc f l'est également, avec pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Posons $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 1]$. Pour tout $x \geq 0$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$. Pour $(x, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2b$ et $t \mapsto 2b$ est continue et intégrable sur $[0, 1]$. Donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ avec, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} x dt$. Le changement linéaire $u = xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$.

- 2) D'après les calculs précédents, $f + g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , de dérivée nulle. La fonction $f + g$ est donc constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geq 0$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
- 3) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ car φ est continue sur \mathbb{R}^+ et $\varphi(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geq 0$, on a $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. Par encadrement, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \frac{\pi}{4}$ et puisque $I \geq 0$, on obtient $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

IV. Transformée de Laplace et intégrale de Dirichlet

- 1) F est bien définie sur \mathbb{R}_+^* car pour $s > 0$, on a $e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$ et $e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto e^{-st} \frac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ pour $s > 0$.

D'après la première phrase de l'énoncé, $F(0)$ est définie également. Montrons que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $f : (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t)$.

Soit $a > 0$, pour tout $x \geq a$ et $t > 0$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} |\sin(t)| \leq e^{-at}$ et $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , donc par théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, +\infty[$, donc sur \mathbb{R}_+^* , avec pour tout $s > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = - \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = - \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

- 2) Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $F(x) = c - \arctan(x)$. Or, comme

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc $c = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

- 3) Il n'est pas possible d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale en l'état car $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R} .

Posons

$$\begin{cases} F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \\ F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \end{cases}$$

de sorte que $F = F_1 + F_2$.

La fonction F_1 est de classe \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^+ car on dispose de la domination $|f(x, t)| = e^{-xt} \frac{|\sin(t)|}{t} \leq 1$ et la constante 1 est intégrable sur $]0, 1]$.

Montrons la continuité sur \mathbb{R}_+ de $F_2 = \text{Im} G$ avec $G : x \mapsto$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt.$$

Pour $X \geq 1$,

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt = \left[\frac{1}{i-x} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} \right]_1^X + \frac{1}{i-x} \int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Comme $\left| \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable et

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Or, $(x, t) \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times [1, +\infty[$ et on dispose de la domination $\left| \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ donc G est continue sur \mathbb{R}^+ donc F_1 et F_2 le sont. Et donc F aussi.

4) On a donc $\frac{\pi}{2} = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$