XV. Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

I. Inégalité de Cauchy-Schwarz et application (banque CCINP MP)

1) **a)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$
Preuve :
Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$.

On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
De plus, $P(\lambda) = (x+\lambda y | x+\lambda y)$.
Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\,(x|y) + ||x||^2$.
On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
Premier cas : si $y = 0$
Alors $|\,(x|y)\,| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
Deuxième cas : $y \neq 0$
Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
Et donc, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$.

b) On reprend les notations de 1. .
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.
Supposons que $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y||$.

Premier cas : si $y = 0$
Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.
Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|\,(x|y)\,| = |\alpha|.|\,(y|y)\,| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2) On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
On pose $A = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$.
$A \subset \mathbb{R}$.
$A \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall\, f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

Soit $f \in E$.
On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.
D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.
D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :
$\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
On en déduit que $\forall\, f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

II. Polynômes de Legendre

1) Bilinéarité et positivité évidentes et si $\varphi(P,P)=0$ c'est que P est la fonction nulle car P^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle. On en déduit que P est le polynôme nul car il possède une infinité de racines, d'où la propriété de définie positivité.

2) **a)** $\left(x^2-1\right)^k$ est de degré $2k$ donc sa dérivée k-ième est de degré $2k-k=k$.

b) En intégrant par parties en posant $v'=\frac{\mathrm{d}^k\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^k}$ et $u=x^i$, on a $v=\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}$ et $u'=ix^{i-1}$, d'où

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(X^i,f^k\right) &= \int_{-1}^{1} x^i\frac{\mathrm{d}^k\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^k}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^i\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} ix^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Mais 1 et -1 sont des racines de multiplicité k de $p_k(x)=\left(x^2-1\right)^k$, donc 1 et -1 annulent p_k jusqu'à sa dérivée $k-1$-ième. Ainsi,

$$
\varphi\left(X^i,f^k\right) = -\int_{-1}^{1} ix^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{k-1}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-1}}\,\mathrm{d}x
$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(X^i,f^k\right) &= \left[-ix^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}\right]_{-1}^{1} \\
&\quad + \int_{-1}^{1} i(i-1)x^{i-2}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} i(i-1)x^{i-2}\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

puisque 1 et -1 annulent $\frac{\mathrm{d}^{k-2}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-2}}$. Et ainsi de suite : en dérivant $i+1$ fois, il restera

$$
\varphi\left(X^i,f^k\right) = \left[(-1)^i i!\frac{\mathrm{d}^{k-i}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-i}}\right]_{-1}^{1} = 0
$$

puisque 1 et -1 annulent $\frac{\mathrm{d}^{k-i}\left(\left(x^2-1\right)^k\right)}{\mathrm{d}x^{k-i}}$.

c) Par définition même du processus d'orthonormalisation de la base $(1,X,\dots,X^n)$, on a $\mathrm{Vect}\left(1,X,\dots,X^i\right)=\mathrm{Vect}\left(e_0,e_1,\dots,e_i\right)$, donc chaque e_i est combinaison de $1,X,\dots,X^i$. Puisque $\varphi\left(X^j,f_k\right)=0$ pour tout $j\in\{0,\dots,k-1\}$, on a $\varphi\left(e_j,f_k\right)=0$ lorsque $j\leqslant k-1$. Enfin, f_k étant de degré k, f_k est combinaison de $\left(1,X,\dots,X^k\right)$ donc de $(e_0,e_1,\dots,e_k)$ et on peut donc écrire

$$
f_k=\sum_{j=0}^{k}\lambda_j e_j
$$

et comme $(e_0,\dots,e_n)$ est une base orthonormée, $\varphi\left(f_k,e_j\right)=\lambda_j$. C'est donc que $\lambda_j=0$ pour tout $j\leqslant k-1$ et $f_k=\lambda_k e_k$.

III. Une projection orthogonale (banque CCINP MP)

1) $D = \text{Vect}\,((1,2,3))$.
$(1,2,3) \notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ ne vérifient pas l'équation de P.
Donc $D \cap P = \{0\}$. (*)
De plus, $\dim D + \dim P = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$. (**)
D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Par définition d'une projection, $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D$.
$u - p(u) \in D$ signifie que $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \alpha(1,2,3)$.
On en déduit que $p(u) = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - 3\alpha)$. (***)
Or $p(u) \in P$ donc $(x-\alpha)+(y-2\alpha)+(z-3\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \dfrac{1}{6}(x+y+z)$.
Et donc, d'après (***), $p(u) = \dfrac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)$.
Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit A la matrice de p dans la base e. On a $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3) On pose $e'_1 = (1,2,3)$, $e'_2 = (1,-1,0)$ et $e'_3 = (0,1,-1)$.
e'_1 est une base de D et (e'_2, e'_3) est une base de P.
Or $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ donc $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus $e'_1 \in D$ donc $p(e'_1) = 0$. $e'_2 \in P$ et $e'_3 \in P$ donc $p(e'_2) = e'_2$ et

$p(e'_3) = e'_3$.
Ainsi, $M(p, e') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. Une distance (banque CCINP MP)

1) On a immédiatement $\mathscr{F} = \text{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
On peut donc affirmer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$\mathscr{F} = \text{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$.
De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$.
Comme (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$,
$M \in \mathscr{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
C'est-à-dire, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
Ou encore, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
On en déduit que $\mathscr{F}^\perp = \text{Vect}\,(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathscr{F}^\perp$.

3) On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) On note $d(J, \mathscr{F})$ la distance de J à $\mathscr{F}$.
D'après le cours, $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)||$ où $p_{\mathscr{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}$.
On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
Donc $p_{\mathscr{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
On en déduit que $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

V. Une autre distance

1) Soit P et Q dans E.

La fonction $f\ : t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Donc $f(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

2) Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}, (P,Q)\mapsto\langle P\mid Q\rangle$ est symétrique.

La linéarité de l'intégrale et les règles usuelles de calculs de $\mathbb{R}$ entraînent la linéarité de $P\mapsto\langle P\mid Q\rangle$. Par symétrie on a la linéarité à droite.

Pour tout $P\in E, \langle P\mid P\rangle = \int_0^{+\infty}P(t)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est positive car $f\,:\,t\mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est positive. De plus si $\langle P\mid P\rangle = 0, f$ étant continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,+\infty[$, on a $f=0$ sur $[0,+\infty[$. D'où P est nul sur $[0,+\infty[$. Donc P est un polynôme qui a une infinité de racines : P est le polynôme nul.

La forme $(P,Q)\mapsto\langle P\mid Q\rangle$ est symétrique, bilinéaire, définie positive : c'est un produit scalaire sur E.

3) Classiquement $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}=0$.

Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on a par intégration par parties :

$$I_p = \int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[t^p\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}=0$, on obtient pour tout $p\geqslant 1, I_p = pI_{p-1}$.

On en déduit que pour $p\in\mathbb{N}, I_p = \int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = p!$.

4) Soit $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Notons $P_k = X^k$.

En notant d la distance au sens de$\langle|\rangle$ de P_k à $\mathscr{P} = \operatorname{vect}(P_0,P_1)$, on sait que :

$$m_k = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^{+\infty}\left(t^k-at-b\right)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = d^2$$

Base orthonormale de $\mathscr{P}$ (par la méthode de Gram-Schmidt)

$$\|P_0\|^2 = \int_0^{+\infty}1^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = I_0 = 1. \text{ Donc } P_0 \text{ est de norme } 1$$

Posons $P = P_1 - \langle P_0\mid P_1\rangle P_0$.

$$\langle P_0\mid P_1\rangle = \int_0^{+\infty}1\cdot t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = I_1 = 1$$

Donc $P = P_1 - P_0 = X-1$.

$$\|P\|^2 = \int_0^{+\infty}(t-1)^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2-2+1 = 1$$

Une base orthonormale de $\mathscr{P}$ est $(Q_0,Q_1) = (1, X-1)$.
Projeté orthogonal de P_k sur $\mathscr{P} = \operatorname{vect}(Q_0,Q_1)$.
On a alors si p désigne la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$:

$$p(P_k) = \langle Q_0\mid P_k\rangle Q_0 + \langle Q_1\mid P_k\rangle Q_0$$
$$\|p(P_k)\|^2 = \langle Q_0\mid P_k\rangle^2 + \langle Q_1\mid P_k\rangle^2$$

Or $\langle Q_0\mid P_k\rangle = I_k = k!$ et :

$$\begin{aligned}\langle Q_1\mid P_k\rangle &= \left\langle X-1\mid X^k\right\rangle\\ &= \left\langle X\mid X^k\right\rangle - \left\langle 1\mid X^k\right\rangle\\ &= I_{k+1}-I_k\\ &= (k+1)!-k!\\ &= k(k!).\end{aligned}$$

Donc $\|p(P_k)\|^2 = \left(1+k^2\right)(k!)^2$. Enfin $\|P_k\|^2 = \left\langle X^k\mid X^k\right\rangle = I_{2k} = (2k)\ !$ et :

$$m_k = \|P_k\|^2 - \|p(P_k)\|^2 = (2k)! - \left(1+k^2\right)(k!)^2$$