XIX – Fonctions de plusieurs variables

I. Fonctions positivement homogènes

1) Tous les polynômes de deux variables dont les termes sont de degré α.

2) On pose $g(x,y) = f(tx,ty)$. On a d'une part :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$$

D'autre part, en utilisant la relation $g(x,y) = t^r f(x,y)$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = t^r\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

On en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{r-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

On fait de même avec la dérivée partielle suivant y.

3) Supposons d'abord que f est homogène de degré r. On a donc :

$$f(tx,ty) = t^r f(x,y)$$

On dérive cette relation par rapport à t. On trouve :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = rt^{r-1}f(x,y).$$

Le résultat vient en appliquant le résultat de la première question, qui dit que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $r-1$. Pour la réciproque, posons $\varphi(t) = f(tx,ty)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la relation vérifiée par f (qu'on appelle relation d'Euler), on a :

$$\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \frac{r}{t}f(tx,ty) = \frac{r}{t}\varphi(t).$$

La dérivée de l'application $t^{-r}\varphi(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc constante sur cet intervalle, et comme en outre $\varphi(1) = f(x,y)$, on démontre que f est bien homogène de degré r.

II. Calcul d'une différentielle

On pose $\psi(x) = \|x\|^2$ et $\varphi(x) = 1/\psi(x)$. Comme $\psi(x+h) = \psi(x) + 2(x \mid h) + \|h\|^2 = \psi(x) + 2(x \mid h) + o(\|h\|)$, ψ est différentiable, et $\mathrm{d}\psi(x)(h) = 2(x \mid h)$. Il en résulte que φ est différentiable, et on a pour tout x non nul et $h \in E$, $\mathrm{d}\varphi(x)(h) = -\dfrac{\mathrm{d}\psi(x)(h)}{\psi(x)^2} = -\dfrac{2(x \mid h)}{\|x\|^4}$.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \varphi(x+h)(x+h) = (\varphi(x) + \mathrm{d}\varphi(x)(h) + o(h))(x+h) \\ &= f(x) + \underbrace{\mathrm{d}\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h}_{\text{linéaire par rapport à } h} + o(h) \end{aligned}$$

Il en résulte que f est différentiable et $\mathrm{d}f(x)(h) = \mathrm{d}\varphi(x)(h)x + \varphi(x)h$, d'où

$$\forall\, x \in E\backslash\{0\},\ \forall\, h \in E,\ \mathrm{d}f(x)(h) = -\frac{2(x \mid h)x}{\|x\|^4} + \frac{h}{\|x\|^2}.$$

III. Des plans tangents

Un vecteur directeur de (D) est $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, un point de (D) est $M(2,-3,0)$.

On pose $f\ : (x,y,z) \mapsto xy - z^3$. Alors (S) est définie par l'équation $f(x,y,z) = 0$.

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -3z^2 \end{pmatrix}$.

Soit (P) le plan tangent à (S) au point $A(x,y,z)$. Alors

$$
\begin{aligned}
(D) \subset (P) &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \perp \nabla f(A) \\ u \perp \nabla f(A) \\ A \in (S) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)y + (y+3)x + z\left(-3z^2\right) = 0 \\ 3x - 3z^2 = 0 \\ xy = z^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left(z^2-2\right)z + (z+3)z^2 - 3z^3 = 0 \\ x = z^2 \\ yz^2 = z^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -z(z-1)(z-2) = 0 \\ x = z^2 \\ yz^2 = z^3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $z = 0$, on obtient $x = y = z = 0$, mais $(0,0,0)$ est un point critique, ce qui est exclu par existence d'un plan tangent.

Donc $z \neq 0$, et alors il reste $\begin{cases} (z-1)(z-2) = 0 \\ x = z^2 \\ y = z \end{cases}$, donc les points $A_1(1,1,1)$ et $A_2(4,2,2)$, et donc les plans d'équations $x + y - 3z = -1$ et $x + 2y - 6z = -4$.

IV. Une équation aux dérivées partielles

Lapplication $\varphi\ :\ (\theta,\rho) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un C^1 difféomorphisme de l'ouvert $U =]0;\frac{\pi}{2}[\times]0;+\infty[$ sur l'ouvert $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

L'application $f \longmapsto f \circ \varphi$ est donc une bijection de $C^1\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \mathbb{R}\right)$ sur $C^1(U,\mathbb{R})$.

Soient $f \in C^1\left(\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \mathbb{R}\right)$, $g = f \circ \varphi$. On a, pour tout (θ,ρ) de U, par dérivation d'une fonction composée :

$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\theta,\rho)$

$$
= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta
$$

Ainsi, f est solution de l'EDP (équation aux dérivées partielles) de l'énoncé si et seulement si g est solution de l'EDP :

$$
\forall(\theta,\rho) \in U, \quad \frac{\partial g}{\partial \rho}(\theta,\rho) = \frac{\cos\theta}{\rho}
$$

Comme, pour $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$ fixé, ρ décrit l'intervalle $]0;+\infty[$, la solution générale de l'EDP ci-dessus est $g : (\theta,\rho) \longmapsto \cos\theta\ln\rho + A(\theta)$, où $A \in C^1(]0;\frac{\pi}{2}[,\mathbb{R})$.

Puisque $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \text{Arctan}\,\frac{y}{x}$, on conclut que la solution générale de l'EDP proposée est :

$$
f : \quad (x,y) \longmapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\ln\left(x^2+y^2\right) + C\left(\frac{y}{x}\right)
$$

où $\quad C \in C^1(]0;+\infty[,\mathbb{R})$.

V. Une étude de points critiques et d'extremums

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-1 \\ -2y \end{pmatrix}$, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Deux points critiques : $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

$H_f(\frac{1}{\sqrt{3}},0) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, pas d'extremum.

$H_f(-\frac{1}{\sqrt{3}},0) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, maximum strict.