XI – Séries entières

I. Comparaisons de rayons de convergence

1) Ces deux séries entières ont le même rayon de convergence, et pour le montrer il suffit de montrer que si $\alpha \geqslant 0$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence. En effet, si le résultat est vrai pour $\alpha > 0$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n^\alpha} z^n$ ont le même rayon de convergence puisque $a_n = n^\alpha \times \dfrac{a_n}{n^\alpha}$. Et ainsi le résultat sera aussi vrai pour $\alpha < 0$.
Pour cela posons $b_n = n^\alpha a_n$, et notons R_a et R_b les rayons de convergence des deux séries entières associées.

— Si $\alpha = 0$, $a_n = b_n$ et donc le résultat est immédiat.

— Si $\alpha > 0$, alors $a_n = o(b_n)$ donc $R_a \geqslant R_b$.
Soit $r < R_a$. Alors il existe $\rho \in]r, R_a[$. Alors $b_n r^n = a_n \rho^n \times n^\alpha \left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n = o\left(a_n \rho^n\right)$ par croissances comparées. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n r^n$ converge, car $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \rho^n$ converge. Ainsi $r \leqslant R_b$, et ainsi étant valable pour tout $r < R_a$, nous avons $R_a \leqslant R_b$.
Finalement, $R_a = R_b$.

2) Soit $\alpha = \deg P - \deg Q$, et soit p et q les coefficients dominants respectifs de P et Q (qui sont non nuls). Alors $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \sim \dfrac{p}{q} n^\alpha$. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

II. Calculs de rayons de convergence (Banque CCP MP)

1) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par :
$R = \sup \{r \geqslant 0 \,/ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.
On peut aussi définir le rayon de convergence de la manière suivante :

$\exists\,! \, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.
ii) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).
R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Remarque : pour une série entière de la variable réelle, la définition est identique.

2) **a)** Notons R le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
Pour $z = 0$, $\sum u_n(0)$ converge.
Pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{n+1}{4n+2}|z|^2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{|z|^2}{4}$.
D'après la règle de d'Alembert,
Pour $|z| < 2$, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
Pour $|z| > 2$, la série numérique diverge grossièrement.
On en déduit que R=2.

b) Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^{(-1)^n}$.
On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leqslant |n z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^n$ vaut 1.
Donc $R \geqslant 1$. (*)
De même, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|\dfrac{1}{n} z^n\right| \leqslant |a_n z^n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n} z^n$ vaut 1.
Donc $R \leqslant 1$. (**)
D'après (*) et (**), $R = 1$.

c) Notons R le rayon de convergence de $\sum \cos nz^n$ et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos n$.
On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leqslant |z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ vaut 1.
Donc $R \geqslant 1$. (*)
Pour $z = 1$, la série $\sum \cos nz^n = \sum \cos n$ diverge grossièrement car $\cos n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
Donc $R \leqslant 1$. (**)
D'après (*) et (**), $R = 1$.

III. Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ (Banque CCP MP)

1) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

On en déduit que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $R = +\infty$.

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3) **a)** Pour $x \geqslant 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(t) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.

b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
Cela prouve que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

IV. Une équation différentielle (Banque CCP MP)

1) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
Pour tout $x \in\,]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1}x^{n-1}$.

Donc $x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}\right)x^n$.

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $na_{n+1} = (n+1)a_n$.
Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = na_1$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
$x \mapsto a_1 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = a_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.

2) Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
Prouvons que les solutions de (E) sur $]0; 1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.
Si toutes les solutions de (E) sur $]0; 1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; 1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall\, x \in\,]0; 1[$, $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \longmapsto x(x-1)$, $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 1$ sont continues sur $]0; 1[$ et que la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0; 1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; 1[$ est un plan vectoriel.
D'où l'absurdité.

V. Calculs de sommes de séries entières (Banque CCP MP)

1) On note R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x, on pose $u_n(x)=\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

Pour x non nul, $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\dfrac{3nx^2}{n+1}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\left|3x^2\right|$.

Donc, d'après la règle de d'Alembert :

si $\left|3x^2\right|<1$ c'est-à-dire si $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument

et si $\left|3x^2\right|>1$ c'est-à-dire si $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.

On en déduit que $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

On pose : $\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.

On a : $\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(3x^2)^n}{n}$.

Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall\, t\in\,]-1,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n}=-\ln(1-t)$.

Ainsi : $\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x)=-\ln(1-3x^2)$.

2) Notons R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n x^n$.

On considère les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n}x^{2n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}4^n x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum\limits_{n\geqslant 0}5^{n+1}x^{2n+1}$.

Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}5^{n+1}x^{2n+1}$.

Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}x^n$ vaut 1.

Or, $\sum\limits_{n\geqslant 0}4^n x^{2n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}(4x^2)^n$.

Donc pour $|4x^2|<1$ c'est-à-dire $|x|<\dfrac{1}{2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}4^n x^{2n}$ converge absolument

et pour $|4x^2|>1$ c'est-à-dire $|x|>\dfrac{1}{2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}4^n x^{2n}$ diverge.

On en déduit que $R_1=\dfrac{1}{2}$.

Par un raisonnement similaire et comme $\sum\limits_{n\geqslant 0}5^{n+1}x^{2n+1}=5x\sum\limits_{n\geqslant 0}(5x^2)^n$, on trouve $R_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n x^n$ étant la série somme des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n}x^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n+1}x^{2n+1}$, on en déduit, comme $R_1\neq R_2$, que $R=\min(R_1,R_2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

D'après ce qui précède, on en déduit également que :

$\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right[$, $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4x^2)^n+5x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(5x^2)^n=\dfrac{1}{1-4x^2}+\dfrac{5x}{1-5x^2}$.

VI. Développements en série entière (Banque CCP MP)

1) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4(2n+3)}=\dfrac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4}$.

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{4}<1$.

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2) D'après le cours, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $u\mapsto(1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha\notin\mathbb{N}$.

De plus, $\forall\, u\in\,]-1,1[$, $(1+u)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}u^n$.

En particulier, pour $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ et $u=-t$:

$R=1$ et $\forall\, t\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!}(-t)^n$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.\ldots 2n=2^n n!$, on obtient :

$\forall\, t\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}t^n$

Conclusion : $R=1$ et $\forall\, t\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}t^n$.

3) D'après la question précédente, en remarquant que : $x\in]-1,1[\Leftrightarrow t=x^2\in[0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient :

$\forall\, x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$ avec un rayon de convergence $R=1$.

Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\text{Arcsin}':x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.

De plus, on obtient :

$\forall\, x\in]-1,1[,\ \text{Arcsin}\,x=\underbrace{\text{Arcsin}\,0}_{=0}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$ avec un rayon de convergence $R=1$.

4) Prenons $x=\dfrac{1}{2}\in]-1,1[$ dans le développement précédent.

On en déduit que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\,\dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

C'est-à-dire, en remarquant que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}=\dfrac{\pi}{3}$.