I. Séries numériques

23 octobre 2024

Table des matières

Programme officiel

A - Compléments sur les séries numériques

Cette section a pour objectif de consolider et d'élargir les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.
L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	La démonstration n'est pas exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Rappel sur les sommes finies et les sommes doubles

1.1. Propriétés des sommes finies

Proposition 1.1.1.
Soit $m, n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n \leqslant p$, soit $a_m, \ldots, a_p, b_m, \ldots, b_p$ des nombres complexes, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors

1. Linéarité :
$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$
2. Relation de Chasles :
$$\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k.$$
3. Décalage d'indice :
$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k.$$
4. Renversement d'indice : soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes. On a
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$$
et
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}.$$
5. Simplification téléscopique :
$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Remarque 1.1.2.

- Le symbole produit Π a les mêmes propriétés, à l'exception de la linéarité. On fera d'ailleurs bien attention au résultat suivant :
$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$
- Par convention une somme vide est nulle (0 est le neutre pour l'addition). Par exemple $\displaystyle\sum_{k=5}^{1} a_k = 0$. De même, un produit vide vaut 1 (le neutre pour le produit) : $\displaystyle\prod_{k=5}^{1} a_k = 1$.

1.2. Formules usuelles

Proposition 1.2.1. 1. Soit n un entier naturel. Alors

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d) hors-programme mais simple à retenir : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. **Identité remarquable généralisée :** soit $n \in \mathbb{N}$ et $a,\ b \in \mathbb{C}$, alors :
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$
3. **Formule de sommation géométrique :** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors,
$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} \dfrac{z^n-1}{z-1} & \text{si } z \neq 1 \\ n & \text{si } z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 1.2.2.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

Remarque 1.2.3.
Il est souvent utile de connaître certaines de ces formules dans le cas où l'indice de début de somme n'est pas 0.
Ainsi :
$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1 \text{ (nombre de termes),}$$
$$\sum_{k=m}^{n} k = (n-m+1)\frac{n+m}{2}$$
dont l'on peut se souvenir en remarquant qu'il s'agit de : nombre de termes $\times$ moyenne des termes, et si $z \neq 1$
$$\sum_{k=m}^{n} z^k = z^m \frac{1-z^{n-m+1}}{1-z}$$
que l'on peut retrouver de deux manières :
$$\sum_{k=m}^{n} z^k = z^m \sum_{k=0}^{n-m} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{m-1} z^k.$$

On rappelle également que si $n, k \in \mathbb{Z}$ tels que $k \in [\![0, n]\!]$ alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et sinon $\binom{n}{k} = 0$. On retiendra les égalités suivantes :

Proposition 1.2.4 (Propriétés des coefficients binomiaux)**.**
Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
2. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$;
3. **Formule du triangle de Pascal :**
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \ ;$$
4. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Proposition 1.2.5.

1. **Formule du binôme de Newton :** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a,\ b \in \mathbb{C}$. On a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ ;$$

2. En particulier
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n\ ;$$
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

Exercice 1.2.6.
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\theta}$.

1.3. Sommes doubles

Définition 1.3.1 (Somme double)**.**
Soit $(z_{k,\ell})_{m\leqslant k\leqslant n,p\leqslant \ell\leqslant q}$ la donnée de $(n+1-m)(q+1-p)$ nombres complexes, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :
$$\begin{pmatrix} z_{m,p} & \dots & z_{m,q}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n,p} & \dots & z_{n,q}\end{pmatrix}.$$
Leur somme est notée
$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n,\ p\leqslant \ell\leqslant q} z_{k\ell}.$$

Exemple 1.3.2.
Le nombre $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant 3,4\leqslant j\leqslant 5} i^2 j$ est la somme des éléments du tableau
$$\begin{pmatrix} 4 & 5\\ 16 & 20\\ 36 & 45\end{pmatrix}$$
et vaut donc 126.

Remarque 1.3.3.
Par décalage d'indice, cette somme vaut $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant 3,1\leqslant j\leqslant 2} i^2(3+j)$.

On essaiera au maximum d'écrire des sommes partant de 0 ou de 1.

La plus souvent, nous sommerons des nombres sur des tableaux carrés. Dans ce cas, nous utiliserons des notations plus légères.

Définition 1.3.4 (Somme double sur un tableau carré)**.**
Soit $(z_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ la donnée de n^2 nombres complexes, que l'on peut représenter dans le tableau suivant :
$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & \dots & z_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ z_{n,1} & \dots & z_{n,n}\end{pmatrix}.$$
Leur somme est notée
$$\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} z_{k,\ell}.$$
La somme des éléments de ce tableau situés *au dessus* de sa diagonale, diagonale comprise, est notée
$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} z_{k,\ell}.$$
La somme des éléments de ce tableau situés *strictement au dessus* de sa diagonale, est notée
$$\sum_{1\leqslant k< \ell\leqslant n} z_{k,\ell}.$$
La somme des éléments de ce tableau situés *en dessous* de sa diagonale, diagonale comprise, est notée
$$\sum_{1\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

La somme des éléments de ce tableau situés *strictement en dessous* de sa diagonale, est notée

$$\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} z_{k,\ell}.$$

Remarque 1.3.5.
Il est important de se rappeler que les coefficients d'indice (i,j) d'un tel tableau :

— sont sur la diagonale si et seulement si $i=j$;

— sont strictement au dessus de la diagonale si et seulement si $i<j$;

— sont strictement au dessous de la diagonale si et seulement si $j<i$.

On pourra par exemple décomposer la somme des éléments d'un tel tableau sur ces trois parties :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} z_{i,i} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} z_{i,j}.$$

Théorème 1.3.6 (Sommes doubles et permutation des Σ)**.**
Soit $(z_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Alors :

1. **Théorème de Fubini :** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}.$
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{ij}.$
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{ij}.$

Démonstration.
Cela revient, à chaque fois, à sommer les éléments du tableau ligne par ligne ou colonne par colonne. □

Exercice 1.3.7.
Combien y a-t-il de cases dans un tableau de dimension $n\times n$?
Retrouver cela en calculant $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1$.
Faire de même pour un tableau triangulaire.

2. Premières définitions sur les séries

Définition 2.0.1 (Premières définitions)**.**
À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall, n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- Cette suite (S_n) est appelée ***série de terme général*** u_n. On la note $\sum u_n$ ou $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$. L'indice n est bien entendu muet.
- Lorsque la suite (u_n) n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n est définie par la suite $\displaystyle S_n=\sum_{k=n_0}^{n} u_k$, pour tout $n\geqslant n_0$. Elle est notée $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.
- Le terme d'indice n de la suite (S_n) s'appelle la ***somme partielle d'indice (ou d'ordre)*** n, ou n^e ***somme partielle*** de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite de (S_n) est appelée ***somme de la série*** $\sum u_n$ et notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
  Dans le cas contraire on dit que la série ***diverge***.
- La ***nature*** d'une série est sa convergence ou sa divergence. Deux séries sont dites ***de même nature*** si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Remarque 2.0.2.
Une série n'est donc qu'une suite, et on peut donc lui appliquer tous les résultats connus sur les suites. Réciproquement, toute suite est une série (*cf.* 2.0.9).

Remarque 2.0.3.
Si (u_n) est complexe, notons (a_n) sa partie réelle et (b_n) sa partie imaginaire. Alors, en vertu du cours sur les suites, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et dans le cas de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Exemple 2.0.4 (Séries arithmétiques)**.**
Les séries de la forme $\sum na$, avec $a \in \mathbb{C}$, ne sont convergentes que si $a = 0$.

Dans tous les cas la somme partielle S_n vaut $a\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Définition 2.0.5 (Reste d'une série convergente)**.**
Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geqslant n} u_k$ converge également. Sa somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée ***reste d'ordre (ou d'indice)*** n de la série $\sum u_n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$

soit, en notant S_n la somme partielle d'ordre n et R_n le reste d'ordre n,

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant n$. Alors,

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = S_N - S_n.$$

Comme (S_N) converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors $\sum_{k \geqslant n+1} u_k$ converge et sa somme est donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n.$$

□

Exemple 2.0.6 (Séries géométriques)**.**
Les séries de la forme $\sum z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$, sont convergentes si et seulement si $|z| < 1$. Dans tous les cas la somme partielle S_n vaut $\dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ si $z \neq 1$, et $n + 1$ si $z = 1$.

Si $|z| < 1$, alors la somme de la série est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Le reste de la série est

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1 - z}.$$

Remarque 2.0.7.
Soit $\sum u_n$ une série convergente, dont on note S_n et R_n les restes à l'ordre n.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$ et $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

En particulier, si $|R_n| < \varepsilon$, on peut dire que S_n est une approximation de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à ε près.

Proposition 2.0.8.
Deux séries dont les termes généraux sont égaux à partir d'un certain rang ont même nature.

Démonstration.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites égales à partir du rang N. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Alors pour tout $n \geqslant N$, $S_n = S'_n + (S_N - S'_N)$. □

Proposition 2.0.9 (Lien suite-série)**.**
L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & S = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

est un automorphisme d'espaces vectoriels.

Sa réciproque est l'application $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, où pour tout $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $u = \varphi^{-1}(S)$ est la suite définie par

$$u_0 = S_0 \text{ et } \forall, n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration.
La linéarité de φ est facile à vérifier. Il est également aisé de montrer que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. □

Remarque 2.0.10.
En posant $S_{-1} = 0$, on peut écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} S_k - S_{k-1}.$$

Toute série peut donc être vue comme une série télescopique.

Proposition 2.0.11 (Séries télescopiques)**.**
La suite (u_n) et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Dans le cas de convergence,

$$u_n - u_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n.$$

Démonstration.
Nous savons déjà que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont même nature.

De plus la somme partielle d'indice n de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ vaut $u_{n+1} - u_0$ par sommation télescopique. Elle est donc égale au terme u_{n+1}, à une constante près, et a donc la même nature que la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans le cas de convergence, il reste à passer à la limite dans la relation $\sum_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$. □

Exemple 2.0.12.
La série $\sum_{n>0} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ converge.

Nous pouvons même aller plus loin : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On voit aussi que le reste d'ordre n vaut $\frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.0.13.
En simplifiant $\frac{(n+1) - n}{1 + n(n+1)}$, montrer que $\sum \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$ converge et calculer sa somme.

Proposition 2.0.14 (Linéarité de la somme)**.**
L'ensemble des suites dont la série est convergente, muni des lois $+$ et $\cdot$, forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une telle suite associe la somme de sa série est linéaire.

Démonstration.
Élémentaire, d'après les résultats sur les suites. $\square$

Finissons par le résultat principal de cette première partie :

Théorème 2.0.15 (Divergence grossière)**.**

(i) Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(ii) Si la suite (u_n) ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ ***diverge grossièrement***.

Démonstration. (i) Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Puisque pour tout $n > 0$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, alors u_n est la différence des termes généraux de deux suites convergeant vers la même limite. La suite (u_n) tend donc vers 0.

(ii) C'est la contraposée du premier point.

$\square$

Exemple 2.0.16.
La série $\sum \cos n$ diverge grossièrement. En effet, en supposant que $\cos n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la relation $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ donne une contradiction.

Remarque 2.0.17 ( ).
La réciproque du premier point du théorème 2.0.15 est fausse. On peut citer en exemple la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, qui sera revue plus tard.

Donnons également l'exemple de la suite $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Évidemment, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Mais $\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(n+2)$, par sommation télescopique. La série $\sum u_n$ diverge donc.

Concluons sur un dernier exemple, fondamental.

Proposition 2.0.18 (série exponentielle)**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge et

$$\mathrm{e}^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$, que l'on définit sur $\mathbb{R}$. Alors, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)} : t \mapsto z^n \mathrm{e}^{tz}.$$

Alors, par l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et 1, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \mathrm{e}^{z} - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leqslant \frac{1^{N+1}}{(N+1)!} \sup \left\{ \left| z^{N+1} \mathrm{e}^{tz} \right| \mid t \in [0,1] \right\}.$$

Or, si $0 \leqslant t \leqslant 1$, en écrivant sous forme algébrique $z = a + ib$, on a

$$\left| z^{N+1} \mathrm{e}^{tz} \right| = |z|^{N+1} \left| \mathrm{e}^{ta} \mathrm{e}^{itb} \right| = |z|^{N+1} \mathrm{e}^{ta} \leqslant |z|^{N+1} \max(1, \mathrm{e}^{a}).$$

Ainsi,

$$\left| \mathrm{e}^{z} - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \leqslant \frac{(t|z|)^{N+1}}{(N+1)!} \max(1, \mathrm{e}^{a})$$

Par croissances comparées, $\frac{(t|z|)^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, ce qui permet de conclure. $\square$

3. Séries réelles à termes positifs

Étudions maintenant le cas particulier où tous les termes d'une série sont des réels positifs ou nuls.

3.1. Propriété fondamentale

Proposition 3.1.1.
Soit (u_n) une suite à valeurs positives et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Alors la suite (S_n) est croissante.

Démonstration.
Tout simplement, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

Remarque 3.1.2.
Attention, une série peut ne pas être à terme positifs mais avoir toutes ses sommes partielles positives, comme la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$.

Proposition 3.1.3.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.
La suite des sommes partielles est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée, comme conséquence directe du théorème de la limite monotone. □

3.2. Outils de comparaison

Proposition 3.2.1 (Inégalités)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ également et $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ également.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si (S_n) est la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et (S'_n) celle de $\sum v_n$, alors $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(i) (S'_n) converge, donc est majorée, donc (S_n) est également majorée, et comme elle est croissante, elle converge également. Il reste alors à passer à la limite dans la relation $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$.

(ii) c'est le théorème de minoration.

□

Remarque 3.2.2.
Si la relation $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, le résultat du théorème 3.2.1 est valable, à ceci près que dans le point (i) on ne peut pas conclure que $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, mais seulement $0 \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.

Exemple 3.2.3.
$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge et

$$1 < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 2.$$

En effet, pour tout $n > 0$, $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, donc $0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Puisque pour $n = 0$, $\frac{1}{(n+1)^2} = 1$, il vient le résultat.

Corollaire 3.2.4 (Relations de Landau)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives, (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$.

(iii) Si $u_n \sim v_n$ (donc (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang), alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Démonstration. (i) $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée par un certain réel $M > 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$ car (u_n) et (v_n) sont positives. On conclut donc avec 3.2.1.

(ii) si $u_n = o(v_n)$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$.

(iii) si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

□

Exemple 3.2.5.
Puisque $\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$, d'après le résultat sur les séries géométriques, $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge.

3.3. Séries de Riemann

Pour pouvoir utiliser le dernier corollaire, nous avons besoin de « séries étalon », dont la nature est bien connue, et auxquelles on compare les séries à étudier. Les quelques exemples déjà étudiés font partie de ces séries de référence standard, mais la famille de séries la plus utilisée est celle des ***séries de Riemann***, dont font partie la série harmonique et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$.

Théorème 3.3.1 (Séries de Riemann)**.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.
Si $\alpha = 1$, remarquons que $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$. Donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln n)$, qui elle-même est de même nature que la suite $(\ln n)$ d'après 2.0.11, d'où la divergence.

Si $\alpha \neq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ (effectuer un développement asymptotique de $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ ou appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto x^{1-\alpha}$). La série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ est de même nature que la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, d'où le résultat.

On peut aussi remarquer que si $\alpha \leqslant 0$, la divergence est grossière, et si $0 < \alpha < 1$, la série diverge car $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$. □

Le résultat classique suivant est une application directe de 3.2.4 et 3.3.1 :

Corollaire 3.3.2 (Règle $n^\alpha u_n$)**.**
Soient (u_n) une suite réelle positive et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) S'il existe $\alpha > 1$ telle que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ telle que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

(iii) Si la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers une limite non nulle, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. (i) si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

(ii) si $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ alors $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(u_n\right)$, et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(iii) si la suite $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ont même nature.

□

Exemple 3.3.3 (Séries de Bertrand, début)**.**
Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. On considère la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha}$.

- Si $\alpha > 1$: il existe $\gamma \in]1, \alpha[$ et $n^\gamma \frac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées, car $\alpha - \gamma > 0$. Ainsi la série converge.

- Si $\alpha < 1$: il existe $\gamma \in]\alpha, 1[$ et $n^\gamma \dfrac{1}{(\ln n)^\beta n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées, car $\alpha - \gamma < 0$. Ainsi la série diverge.
- Si $\alpha = 1$: si $\beta \leqslant 0$, le terme général est plus grand que $\dfrac{1}{n}$, donc la série diverge. Nous traiterons le cas $\beta > 0$ en 4.1.3.

4. Comparaison série - intégrale

4.1. Principe

Proposition 4.1.1.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est convergente.
De plus la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de f, on a :

$$\forall, t \in [k, k+1],\ 0 \leqslant f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$

Puis, par intégration de cet encadrement sur $[k, k+1]$:

$$0 \leqslant f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \tag{1}$$

et par sommation, pour $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

ou encore

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(0) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - f(n). \tag{2}$$

Les suites $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ et $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ont donc la même nature. De plus, il vient $0 \leqslant f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant u_n$. Ainsi (u_n) est minorée. Enfin, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée et converge donc. □

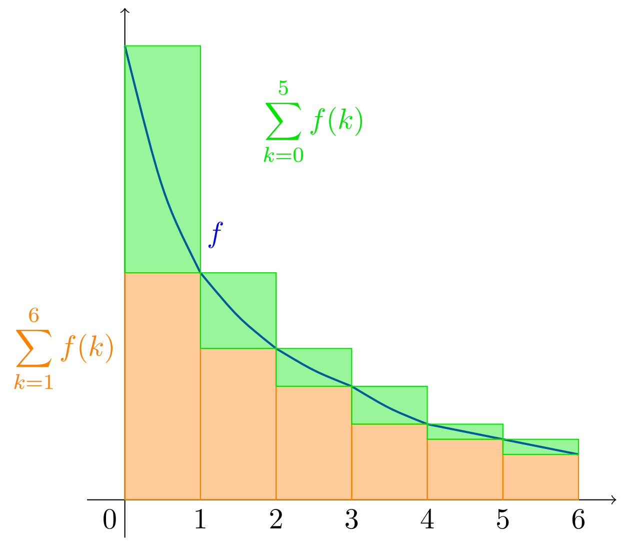


Figure 1 – Exemple de comparaison série-intégrale pour une fonction f décroissante, positive.

Remarque 4.1.2.
L'encadrement (1) est à rapprocher de la méthode des rectangles, vue dans le chapitre sur l'intégration.

Exemple 4.1.3.
Achevons l'étude des séries de Bertrand commencée en 3.3.3.

Si $\beta > 0$, considérons l'application $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$. Elle est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.

Si $\beta = 1$, une primitive de f est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$ et $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(n) - F(2)$. Or $F(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge.

Par comparaison, la série diverge également si $0 \leqslant \beta < 1$.

Si $\beta > 1$, une primitive de f est $F : t \mapsto \dfrac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}$ et $\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t = F(n) - F(2)$. Or $F(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $1-\beta < 0$, donc la série converge.

Remarque 4.1.4.
L'encadrement (2) se réécrit :

$$0 \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0). \tag{3}$$

Cette version est plus souvent utilisée car en général il est plus facile de calculer des intégrales que des sommes, donc il est plus fréquent de d'abord déterminer la nature de l'intégrale pour ensuite en déduire la nature de la série grâce à ce dernier encadrement. En particulier, cet encadrement permet souvent d'obtenir un équivalent de $\sum f(n)$.

Exemple 4.1.5.
Si $\alpha > 0$, donner un équivalent de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ en utilisant une comparaison série-intégrale, et retrouver le résultat 3.3.1 sur la nature des séries de Riemann. On traitera à part le cas $\alpha = 1$. En effet, parmi les primitives des $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ quand $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, le cas $\alpha = 1$ a une forme différente.
Cette autre démonstration est très efficace.

4.2. Cas d'une fonction croissante

Si f est positive est croissante, tout le raisonnement précédent s'adapte en inversant les inégalités, et on aboutit à

$$0 \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n). \tag{4}$$

Cela n'a pas d'intérêt pour déterminer la nature de la série, qui diverge grossièrement (si f n'est pas nulle). Mais cela peut permettre de donner un équivalent de $\sum f(n)$.

Exercice 4.2.1.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

4.3. Estimation du reste dans le cas de convergence

L'encadrement (2) permet d'avoir une estimation du reste d'une série convergente de la forme $\sum f(n)$ avec f décroissante.
Par exemple, soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} = \int_{n+1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{N-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N-1}\end{aligned}$$

et en passant à la limite quand $N \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Si l'on veut une approximation de $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ à 10^{-3} près, il suffit donc de choisir $n = 1000$ et de calculer $\sum_{k=1}^{1000} \dfrac{1}{k^2}$.

5. Séries complexes et convergence absolue

5.1. Résultats généraux

Revenons à des séries à termes quelconques dans $\mathbb{K}$. Nous allons étudier une convergence plus restreinte que la convergence définie en 2.0.1 : la *convergence absolue.*

Définition 5.1.1 (Convergence absolue)**.**
On dit que la série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Un exemple important est celui de la série exponentielle.

Théorème 5.1.2 (Série exponentielle)**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.

Démonstration.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{|z|^n}{n!}$, qui est une série exponentielle, donc converge. □

Proposition 5.1.3.
Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.
Commençons par établir le résultat pour des suites à valeurs réelles. Pour cela, définissons pour une suite (u_n) les deux suites (u_n^-) et (u_n^+) définies par : $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. Nous avons alors :

$$u_n^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n < 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \geqslant 0 \end{cases}$$

$$u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0 \\ |u_n| & \text{si } u_n \leqslant 0 \end{cases}$$

$$0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \tag{5}$$

$$0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n| \tag{6}$$

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \tag{7}$$

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

De (5) et (6) on tire que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes car $\sum |u_n|$ est convergente.
De (7) on tire que $\sum u_n$ est convergente.

Étendons maintenant ce résultat au cas d'une suite (u_n) à valeurs complexes absolument convergente. Pour tout n, on a $0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$, or la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série $\sum |\operatorname{Re} u_n|$ est convergente, donc $\sum \operatorname{Re} u_n$ est absolument convergente, donc convergente d'après le premier point. De même $\sum \operatorname{Im} u_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge. □

Exemple 5.1.4.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n \text{ converge } \iff |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall, p \in \mathbb{N}, \sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

La réciproque est fausse. Soit par exemple la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = v_n - v_{n+1}$, avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que la suite (v_n), elle converge donc.
Mais $|u_n| = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{2}{n}$, donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.
On dit qu'une telle suite, convergente mais pas absolument, est ***semi-convergente***. L'étude de telles suites est souvent délicate !

Corollaire 5.1.5.
Soit (u_n) une suite complexe et (v_n) une suite à termes positifs telles que $|u_n| = O(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ également.

Démonstration.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. □

Remarque 5.1.6.
Une série à termes de signe constant converge absolument si et seulement si elle converge.

Proposition 5.1.7.
L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

Démonstration.
Élémentaire par l'inégalité triangulaire. □

Proposition 5.1.8 (Inégalité triangulaire pour les séries)**.**
Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}$, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

On conclut par passage à la limite en N. □

5.2. Séries alternées

Les séries convergeant mais ne convergeant pas absolument sont appelées ***séries semi-convergentes***. Leur étude est délicate, deux outils principaux étant souvent utilisés : le critère spécial des séries alternées et la transformation d'Abel (qui ne figure pas au programme).

Théorème 5.2.1 (critère spécial des séries alternées, ou CSSA)**.**
Soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

Alors, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

De plus, en notant R_n le reste d'ordre n de la série et S_n sa somme partielle d'ordre n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant S_{2n}$,
2. $R_n \leqslant 0$ si n est pair,
3. $R_n \geqslant 0$ si n est impair,
4. $|R_n| \leqslant u_{n+1}$

Démonstration.
Notons S_n la somme partielle d'ordre n de cette série. Il suffit de montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, pour obtenir qu'elles convergent vers une même limite et donc que (S_n) converge, c'est-à-dire que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

Tout ceci est élémentaire. Considérons $n \in \mathbb{N}$.

— $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
— $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ par décroissance de (u_n), donc (S_{2n}) est décroissante.
— $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$ par décroissance de (u_n), donc (S_{2n+1}) est croissante.

Ainsi, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Par adjacence de ces suites, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant S_{2n}.$$

On obtient donc immédiatement que

$$R_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n - S_{2n} \leqslant 0$$

$$R_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n - S_{2n+1} \geqslant 0$$

On a aussi immédiatement

$$0 \leqslant -R_{2n} = S_{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$$

et de même, par l'encadrement,

$$S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n \leqslant S_{2n+2},$$

on a

$$0 \leqslant R_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = -u_{n+2}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, par disjonction de cas sur la parité de n :

$$|R_n| \leqslant u_{n+1}.$$

□

Remarque 5.2.2.
Comme $S_1 = u_0 - u_1 \leqslant 0$, on a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n \geqslant 0$.

Remarque 5.2.3.
Le critère spécial des séries alternées est parfois formulé de la manière suivante : si $(|u_n|)$ est décroissante, si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si (u_n) est à signes alternées (*i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$), alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. On a alors la majoration $|R_n| \leqslant |u_n|$, et l'on sait aussi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du même signe que u_0.

Exercice 5.2.4.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, et donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-2} près de la somme de cette série.

Exercice 5.2.5 (Séries de Riemann alternées)**.**
Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge-t-elle ?

Remarque 5.2.6.
On ne peut pas prouver la convergence d'une série dont le terme général est équivalent à celui d'une série à laquelle on peut appliquer le CSSA, car ils ne sont pas de signe constant.

Exercice 5.2.7.
Peut-on appliquer le CSSA aux séries de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$ et $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$? Comment les étudier sinon ?

5.3. Comparaison logarithmique et règle de d'Alembert

Voici deux critères de convergence qui peuvent être utiles.

Proposition 5.3.1 (Test de comparaison logarithmique)**.**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Alors :
(i) si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$;
(ii) si $\sum u_n$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

Démonstration.
Nous avons pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$, et donc par récurrence : $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_0}{v_0}$. En posant $\mu = \dfrac{u_0}{v_0}$, il vient donc : $u_n \leqslant \mu v_n$. Le résultat découle alors directement de 3.2.1. □

Proposition 5.3.2 (Règle de d'Alembert)**.**
Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs.

(i) S'il existe $q \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

(ii) S'il existe $q \in [1,+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

(iii) en particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$:
- si $\ell \in [0,1[$, la série $\sum u_n$ est convergente ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente ;
- si $\ell = 1$, on ne peut rien dire, sauf dans le cas $u_n \leqslant u_{n+1}$ à partir d'un certain rang, où il y a divergence grossière.

Démonstration. (i) Posons $v_n = q^n$. Alors $\sum v_n$ converge, et pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Le critère de comparaison logarithmique 5.3.1 permet alors de conclure.

(ii) Même démonstration (ou même divergence grossière).

(iii) Découle des deux points précédents.

□

Remarque 5.3.3.
Cette technique n'est intéressante que pour des suites ne faisant intervenir que des produits et leurs dérivés : quotients, puissances, factorielles.

Exemple 5.3.4.
- Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum u_n$ converge, et de plus on en tire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = n^\alpha$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et pourtant, suivant la valeur de α, $\sum u_n$ peut aussi bien diverger que converger.

6. Formule de Stirling

Voici un équivalent célèbre.

Proposition 6.0.1 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Démonstration.
Elle n'est pas exigible et figure en annexe. □

Exemple 6.0.2.
Démontrer encore une fois que si $x \in \mathbb{R}^*$, la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente.

Exemple 6.0.3.
On a le développement asymptotique

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

En effet, par la formule de Stirling

$$\ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\sqrt{2\pi},$$

ce qui s'écrit exactement

$$\ln(n!) - \left(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1).$$

7. Produit de Cauchy

Le théorème suivant permet de multiplier deux séries absolument convergentes :

Définition 7.0.1 (Produit de Cauchy)**.**
On considère deux séries complexes $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$. On appelle ***produit de Cauchy*** de ces séries, la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où

$$\forall, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Remarque 7.0.2.
Dans le cas où les deux séries ne sont définies qu'à partir du rang 1, le produit de Cauchy est défini par la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ où

$$\forall, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k}.$$

On peut le voir en se ramenant à des séries commençant à 0 grâce à des décalages d'indice, mais le plus simple et de poser $u_0 = v_0 = 0$ et d'utiliser la définition précédente.

Théorème 7.0.3 (Convergence du produit de Cauchy)**.**
On suppose que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration.
Elle n'est pas exigible et figure en annexe. □

Exemple 7.0.4.
Établir que si $(z,z') \in \mathbb{C}^3$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z} \times \mathrm{e}^{z'}$.

Exemple 7.0.5.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Grâce à un produit de Cauchy, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \dfrac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$.

8. Annexes : démonstrations non exigibles

8.1. Formule de Stirling

La démonstration n'est pas exigible et est longue. Elle utilise en particulier l'étude des intégrales de Wallis : on définit la suite $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$, dont l'on donne un équivalent. C'est un exercice très classique, qui ne sera pas repris ici.

Démonstration.
• Étudions la série de terme général défini par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ pour } n \geqslant 2$$

On a, au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergente et de signe constant. Donc $\sum u_n$ converge, on note S sa somme :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

• Exprimons la somme partielle de cette série :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)(\ln(k-1) - \ln(k))\right) \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)\ln(k-1) \right.\\
&\quad \left. - \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln k + \ln k\right) \\
&= n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln k \\
&\quad \text{par télescopage} \\
&= n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + \ln(n!)
\end{aligned}$$

• On a donc, en passant à l'exponentielle :

$$\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \mathrm{e}^{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^S$$

et donc :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^S n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$$

• L'étude des intégrales de Wallis permet d'obtenir :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}}_{p\to+\infty} \sqrt{\pi}$$

Mais en utilisant l'équivalent obtenu précédemment, on a aussi :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2p}\mathrm{e}^{2S}p^{2p+1}\mathrm{e}^{-2p}}{\mathrm{e}^S(2p)^{2p+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2p}\sqrt{p}} = \frac{\mathrm{e}^S}{\sqrt{2}}$$

Et donc, par unicité de la limite, $\mathrm{e}^S = \sqrt{2\pi}$.

• En conclusion :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$$

□

8.2. Convergence du produit de Cauchy

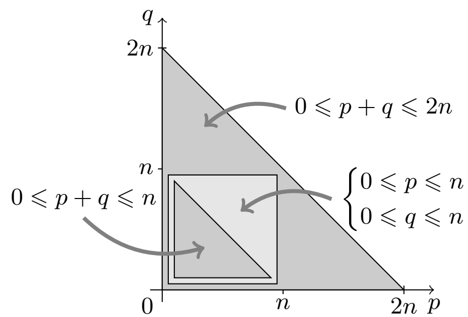
Démonstration.
• On commence par traiter le cas où les suites sont à valeurs positives. Dans ce cas, convergence et convergence absolue désignent la même notion. La démonstration se fait en revenant à la définition de la convergence, c'est-à-dire par l'étude de la suite des sommes partielles. On note :

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k, U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k, \\
V_n &= \sum_{k=0}^{n} v_k, V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \text{ et} \\
W_n &= \sum_{k=0}^{n} w_k
\end{aligned}$$

et on chercher à montrer que $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} UV$. Comme $w_k \geqslant 0$ pour tout k, la suite $(W_n)_n$ est croissante, de même que les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$. On a :

$$\begin{aligned}
W_n &= \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{0\leqslant p+q\leqslant n} u_p v_q \\
U_n \times V_n &= \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} u_p v_q \\
W_{2n} &= \sum_{0\leqslant p+q\leqslant 2n} u_p v_q
\end{aligned}$$

Tous les termes considérés sont positifs. Les domaines de sommation satisfont les inclusions représentées figure .



donc :

$$W_n \leqslant U_n \times V_n \leqslant W_{2n}$$

Par croissance de $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$, on a pour tout n :

$$W_n \leqslant U \times V$$

donc la suite $(W_n)_n$ est croissante et majorée, donc converge vers une limite que l'on note W. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, en utilisant que $(W_{2n})_n$ est extraite de $(W_n)_n$ donc converge vers la même limite, on a $W \leqslant U \times V \leqslant W$. On a donc montré que la suite des sommes partielle $(W_n)_n$ est convergente, donc $\sum w_n$ converge, et sa somme W vaut $U \times V$.

• On se place maintenant dans le cas général de séries numériques à termes généraux quelconques, en conservant les mêmes notations. D'une part la série $\sum w_n$ converge absolument par majoration : Pour tout n :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$$

qui est le terme général d'une série convergente (produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|\Big)$ par application du premier point. D'autre part :

$$\begin{aligned}
|U_n V_n - W_n| &= \left|\sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ n<p+q}} u_p v_q\right| \\
&\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ n<p+q}} |u_p|\,|v_q| \\
&= U'_n V'_n - W'_n \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par le premier point}
\end{aligned}$$

où $U'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$, $V'_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|$ et $W'_n = \sum_{k=0}^{n} |w_k|$. Donc la somme de la série $\sum w_n$ est bien le produit $U \times V$. □

9. Exercices classiques

9.1. Révision sur les suites : le théorème de Césaro

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels ou complexes. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$$

1. On suppose que la suite (u_n) converge vers 0. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0 .
   Indication : soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang N tel que, si $n \geqslant N, |v_n| \leqslant \varepsilon$. Pour cela, couper v_n en deux morceaux.
2. On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que la suite (v_n) converge. C'est le théorème de Césaro.
3. Montrer que la réciproque est fausse.

On montrerait avec les mêmes outils que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, v_n aussi.

9.2. Révision sur les suites : irrationalité de e

On définit la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

1. En introduisant la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on notera ℓ
2. Montrer que ℓ est irrationnel. On pourra raisonner par l'absurde, et encadrer ℓ par u_n et v_n pour n bien choisi.

9.3. Série harmonique et constante d'Euler

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

L'objectif est de montrer que (u_n) converge. Sa limite est appelée

constante d'Euler et notée γ.
Nous allons employer deux méthodes.

a. Comparaison série-intégrale et série télescopique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln n$.
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
3. On pose pour tout $n > 0$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Donner la nature de $\sum v_n$ et conclure.

b. Deux suites adjacentes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $w_n = u_n + \ln n - \ln(n+1)$. Montrer que (u_n) et (w_n) sont adjacentes et conclure.

9.4. Une décomposition de somme

Soit $k > 1$; on note $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ et $T_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^k}$. Calculer T_k en fonction de S_k.

9.5. Natures de deux séries

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$. L'objectif est de comparer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
On pourra traiter les cas où $\sum u_n$ converge ou diverge, et dans ce dernier étudier la série de terme général $w_n = \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

9.6. Transformation d'Abel

Soit (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

1. Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
2. En déduire que la série $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ est convergente.
3. Établir que la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{n}$ est convergente.
   Indication : On pourra commencer par montrer que la suite $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin k$ est bornée.