Série de fonctions

I. La fonction ζ de Riemann

1) Par comparaison à des séries de Riemann, ζ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

2) S'il y avait convergence uniforme en 1, alors $\sum \lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x}$ convergerait, ce qui n'est pas le cas.

3) Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Sur $[a,b] \subset]1,+\infty[$,

$$\forall s \in [a,b],\ \left|f_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

Soit $\rho \in]1,a[$, on a

$$n^\rho \times \frac{(\ln n)^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et il y a donc convergence de la série $\sum \frac{(\ln n)^k}{n^a}$.
Par majoration uniforme, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$.
Par convergence uniforme sur tout segment de $]1,+\infty[$, on peut affirmer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}.$$

4) Monotonie :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leqslant 0$$

donc ζ est décroissante.
Convexité :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

donc ζ est convexe.

5) Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Pour appliquer le théorème de la double limite, observons la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.
Pour $x \geqslant 2$

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[2,+\infty[$. Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

6) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

On en déduit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

i.e.

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Par suite

$$\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

II. Tableau de variation d'une série de fonctions

1) Les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

Par le CSSA $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ CS sur $]0,+\infty[$ vers S.

$\forall a > 0$, sur $[a,+\infty[$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(n+a)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$ donc

$\sum f_n'$ CN sur $[a,+\infty[$ puis CU sur tout segment de $[a,+\infty[$. Par théorème, S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$.

2) On peut appliquer le CSSA à la série de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\dfrac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x)\leqslant 0$ et S est décroissante.

3) $S(x+1)+S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}=\frac{1}{x}$.

4) Quand $x\to 0$: $S(x)=\dfrac{1}{x}-S(x+1)$ et $S(x+1)\to S(1)$ donc $S(x)\sim\dfrac{1}{x}$.

5) Quand $x\to+\infty$: $\dfrac{1}{2}(S(x)+S(x+1))\leqslant S(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(S(x)+S(x-1))$ et $\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x-1}$ d'où $S(x)\sim\dfrac{1}{2x}$.

III. Interversion somme/intégrale

Commençons par observer que

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}&=\sin t\times\frac{\mathrm{e}^{\,-t}}{1-\mathrm{e}\,-t}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin t\times\mathrm{e}^{-nt}.\end{aligned}$$

De plus $t\mapsto\sin t\times\mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par comparaison à une série exponentielle, et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}|\sin t|\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t&\leqslant\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente, donc $t\mapsto\dfrac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Enfin, nous pouvons utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, et ainsi

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin t.\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}\text{Or}\quad\int_0^{+\infty}\sin t.\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t&=\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-n+i)t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n^2+1}.\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

IV. Utilisation du théorème de convergence dominée

Commençons par remarquer que $\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Par sommation géométrique on peut écrire $\dfrac{1}{1+t^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{2n}$ sur $[0,1[$.

Par suite $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_{[0,1[}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ avec $f_n(t)=(-1)^nt^{2n}$ définie sur $[0,1[$.

Ici $\sum f_n$ ne converge pas en 1 donc on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et $\displaystyle\sum\int_{[0,1[}|f_n|=\sum\frac{1}{2n+1}$ diverge et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque non plus. Transitons alors par les sommes partielles.

On pose $S_n(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kt^{2k}$.

On a $S_n\xrightarrow{CS}S$ sur $[0,1[$, avec $S(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.
Les fonctions S_n et S sont continues par morceaux, et

$$|S_n(t)|=\frac{\left|1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}\right|}{1+t^2}\leqslant\frac{2}{1+t^2}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable.

Par convergence dominée $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k t^{2k}\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$