VIII. Séries de fonctions

19 novembre 2024

Table des matières

Programme officiel

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.	Utilisation d'une majoration uniforme de $\lvert f_n(x)\rvert$ pour établir la convergence normale de $\sum f_n$. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout point.
c) Régularité de la somme d'une série de fonctions	
Continuité de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur I converge uniformément sur I, alors sa somme est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$	La démonstration est hors programme.
Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment : si une série $\sum f_n$ de fonctions continues converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série des intégrales est convergente et : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$	
Dérivation de la somme d'une série de fonctions : si une série $\sum f_n$ de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ sous hypothèse similaire à celle décrite dans le cas des suites de fonctions.

Intégration sur un intervalle quelconque

e) Suites et séries de fonctions intégrables	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.	
Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$	La démonstration est hors programme. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Différents types de convergence

1.1 Convergence simple

Définition 1.1.1 (Série de fonctions)**.**
On appelle ***série de fonctions*** définie sur I, de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_n(x) \end{array}.$$

On dira que S_n est la ***somme partielle d'ordre*** n de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k$.

Exemple 1.1.2.
Si $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$, alors la série de fonctions de terme général f_n est la suite de fonctions

$$S_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}.$$

Définition 1.1.3 (Convergence simple)**.**
On dit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k$ ***converge simplement sur*** I si pour tout $x \in I$ fixé la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge.

Dans ce cas on peut alors définir la fonction

$$S : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \end{array}$$

que l'on note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ et que l'on appelle ***somme*** de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S - S_n$ est nommée ***reste d'ordre*** n de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k$ et est notée $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Remarque 1.1.4.
Dans le cas de convergence, pour tout $x \in I$ la suite $(R_n(x))$ converge vers 0, et donc la suite de fonctions (R_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Exemple 1.1.5.
1. Si $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$, alors la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $]-1,1[$ uniquement. On a alors pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$.
2. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exp.
3. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ vers la fonction notée ζ et nommée ***fonction zêta de Riemann***.

1.2 Convergence uniforme

Définition 1.2.1 (Convergence uniforme)**.**
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ ***converge uniformément*** sur I lorsque la suite de ses sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I.

Théorème 1.2.2 (Convergence uniforme et restes)**.**
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle.

Démonstration.
En effet, une série de fonctions n'est qu'un cas particulier de suites de fonctions. Donc si elle converge uniformément sur I, elle converge aussi simplement. On peut alors définir sa somme $S\ : I \to \mathbb{K}$. Par définition de la convergence uniforme, la suite (R_n) converge uniformément sur I vers la fonction nulle, car

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0$$

La réciproque est identique. $\square$

Exemple 1.2.3.
Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé :

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$, $I = [0,1]$
2. $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx^2}$, $I = \mathbb{R}$
3. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)^n}$, $I = \mathbb{R}$
4. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$, $I = \mathbb{R}_+^*$
5. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$, $I = \mathbb{R}$

1.3 Convergence normale

Définition 1.3.1 (Convergence normale)**.**
On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ***converge normalement*** si

(i) les fonctions f_n sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(ii) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 1.3.2.
Le premier point permet de garantir l'existence des $\|f_n\|_\infty$. On se ramène alors à l'existence d'une série numérique.
On peut généraliser la définition précédente au cas où les f_n ne sont bornées qu'à partir du rang n_0 : on demande alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \|f_n\|_\infty$ converge.

S'il n'est pas possible ou compliqué de calculer $\|f_n\|_\infty$, on peut utiliser la proposition suivante :

Proposition 1.3.3 (Majoration et convergence normale)**.**
S'il existe une suite de réels positifs (u_n) tels que

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ supérieur à un rang n_0, et pour tout $x \in I$ on a $|f_n(x)| \leqslant u_n$;

(ii) $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge

alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement.

La suite (u_n) ne doit pas dépendre de x.

Exercice 1.3.4.
Étudier la convergence normale des séries de fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

1.4 Liens entre les différentes convergences

Théorème 1.4.1. (i) La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

(ii) La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

(iii) En cas de convergence normale, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

Démonstration.
Le premier point a déjà été démontré.
Supposons que $\sum f_n$ converge normalement. Alors pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$, donc par majoration la série $\sum f_n(x)$ converge absolument, donc il y a convergence simple et $R_n(x)$ converge absolument. De plus

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_n(x)| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \end{aligned}$$

donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ et ainsi $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où la convergence uniforme.

Enfin, par inégalité triangulaire et convergence absolue, pour tout $x \in I$, $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$, d'où le point (iii). □

Les réciproques sont fausses, trouvez des contre-exemples.

2 Régularité et limites de la somme d'une série de fonctions

2.1 Continuité

Théorème 2.1.1 (Transfert de continuité)**.**
Si

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème analogue concernant les suites de fonctions. □

Exemple 2.1.2.
La fonction exp converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.1.3.
Montrer que la fonction $S\ : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ est définie et continue sur $[0,1]$.

2.2 Interversion de limites

La plupart des résultats de la fin de ce chapitre sont des réécritures de résultats sur les suites de fonctions, dans le cadre des séries de fonctions.

Rappel 2.2.1.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\bar{I}$ l'ensemble égal à I augmenté de ses bornes. Ainsi $\overline{[0,1[} = [0,1]$ et $\overline{]-\infty,2[} = [-\infty,2]$.

Théorème 2.2.2 (de la double limite)**.**
Soit $a \in \bar{I}$. Si

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n tend vers une limite finie ℓ_n en a ;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I

alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Autrement dit

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Remarque 2.2.3.
Visuellement cela ressemble à un résultat d'interversion de $\sum$ et de limite. Mais $\sum_{n=0}^{+\infty}$ n'est pas une somme mais la limite d'une suite de sommes partielles. Ce dernier théorème est donc bien un résultat d'interversion de limites.

Démonstration.
Elle est hors-programme. □

Exercice 2.2.4.
On considère la fonction $S \ : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}$. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1$.

On peut aussi se servir de ce théorème pour justifier qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur I.

Exercice 2.2.5.
Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{1+nx^n}$ converge simplement et non uniformément sur $]0, 1[$.

2.3 Dérivation des séries de fonctions

Théorème 2.3.1 (Transfert de la classe $\mathscr{C}^1$)**.**
Si

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^1(I)$;

(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I ;

(iii) la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur (resp. sur tout segment de) I

alors

(a) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur (resp. sur tout segment de) I ;

(b) la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;

(c) on peut dériver terme à terme : $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème analogue concernant les suites de fonctions. □

Remarque 2.3.2.
Sous ces hypothèses on peut donc écrire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$.

Exercice 2.3.3.

1. Montrer que $\exp' = \exp$.

2. Donner une expression de $f \ :]1, +\infty[, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx^n}$.

   En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

Par récurrence on en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.3.4 (Dérivées d'ordre supérieur)**.**
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{K})$;
(ii) pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
(iii) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur (resp. sur tout segment de) I

alors

(a) pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur (resp. sur tout segment de) I ;
(b) la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
(c) on peut dériver terme à terme : pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque 2.3.5.
Sous ces hypothèses, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Exercice 2.3.6.
Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3 Séries de fonctions et intégration

3.1 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème 3.1.1 (Intégration sur un segment)**.**
Si $I = [a, b]$ et

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$;
(ii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

alors

(a) la série numérique $\sum \int_a^b f_n$ converge ;
(b) $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n\right)$.

Exercice 3.1.2.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = x$.

3.2 Intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Théorème 3.2.1 (Intégration sur un intervalle quelconque)**.**
Si

(i) $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S ;
(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I, S est aussi continue par morceaux ;
(iii) la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge

alors

(a) la fonction S est intégrable sur I ;
(b) $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Démonstration.
Elle est hors-programme. □

Remarque 3.2.2.
Sous ces hypothèses, $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right)$.

Exercice 3.2.3.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

3.3 Utilisation du théorème de convergence dominée

Les hypothèses du théorème **3.1.1** ou du théorème **3.2.1** ne s'appliquent pas toujours, mais il est alors peut-être possible d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Exemple 3.3.1.
Montrons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$.

Commençons par remarquer que $\displaystyle\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Par sommation géométrique on peut écrire $\displaystyle\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ sur $[0,1[$.

Par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ avec $f_n(t) = (-1)^n t^n$ définie sur $[0,1[$.

Ici $\sum f_n$ ne converge pas en 1 donc on ne peut pas utiliser **3.1.1**, et $\displaystyle\sum \int_{[0,1[} |f_n| = \sum \frac{1}{n+1}$ diverge et on ne peut pas appliquer **3.2.1** non plus. Transitons alors par les sommes partielles.

On pose $\displaystyle S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$.

On a $S_n \xrightarrow{CS} S$ sur $[0,1[$, avec $\displaystyle S(t) = \frac{1}{1+t}$.

Les fonctions S_n et S sont continues par morceaux, et

$$|S_n(t)| = \frac{\left|1-(-1)^{n+1}t^{n+1}\right|}{1+t} \leqslant \frac{2}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0,1]$.
Par convergence dominée $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k t^k\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

4 Exercices classiques

4.1 La fonction ζ de Riemann

On définit, là où cela est possible, la fonction $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

1. Donner l'ensemble de définition de ζ.
2. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.
3. Montrer que $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]1,+\infty[,\mathbb{R})$.
4. Étudier la monotonie et la convexité de ζ.
5. Montrer qu'elle a une limite en $+\infty$ et la calculer.
6. Donner un équivalent de ζ en 1^+.

4.2 Tableau de variation d'une série de fonctions

Pour $x > 0$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Préciser le sens de variation de S.
3. Établir $S(x+1) + S(x) = 1/x$.
4. Donner un équivalent de S en 0.
5. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

4.3 Interversion somme/intégrale

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

4.4 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$, en justifiant soigneusement que les théorèmes d'intégration terme à terme sur un segment ou un intervalle quelconque ne peuvent être utilisés.