Suites de fonctions

I. Limite uniforme d'un produit

1) Puisque $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, à partir d'un certain rang n_0 nous avons $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 1$.
En particulier $\|f_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + 1$, donc si f est bornée, les f_n le sont aussi, au moins à partir du rang n_0.
Et de même, s'il existe un rang n_1 à partir duquel les f_n sont bornées, alors si n_2 est un entier fixé tel que $n_2 \geqslant \max(n_0, n_1)$ nous avons $\|f\|_\infty \leqslant \|f_{n_2}\|_\infty + 1$, et f est bien bornée.

2) Grâce à la question précédente, les f_n et les g_n sont bornées à partir d'un certain rang. De plus, nous avons vu à la question précédente qu'à partir d'un certain rang $\|f_n\|_\infty \leqslant 1 + \|f\|_\infty$, la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée. Donc

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|f_n(g_n - g) + (f_n - f)g\|_\infty\\ &\leqslant \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

par somme de produits d'une suite bornée par une suite tendant vers 0.

3) $\|f_n h - fh\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en tant que produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0.

4) Considérons par exemple sur $[0,1[$ les fonctions $f_n\ : x \mapsto x^n(1-x)$ et $h\ : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Une étude de fonction assure que $|f_n|$ atteint son maximum en $\dfrac{n}{n+1}$, ce maximum vaut $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \times \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{\mathrm{e}\,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc (f_n) converge bien uniformément vers 0 sur $[0,1[$.
Mais $hf_n\ : x \mapsto x^n$, qui converge simplement vers 0, mais pas uniformément, car $\sup\limits_{[0,1[} hf_n = 1$.

II. Étude du type de convergence (banque CCP MP)

1) Soit $g_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
Dire que (g_n) converge uniformément vers g sur X signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \forall\, x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ou encore, (g_n) converge uniformément vers g sur $X \iff \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in X} |g_n(x) - g(x)|\right) = 0$.

2) **a)** On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \dfrac{n+2}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$.
Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
En effet, $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-nx^2}|\cos(\sqrt{n}x)|$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}|\cos(\sqrt{n}x)| \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0\\ 1 & \text{si} \quad x = 0\end{cases}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

c) Soit $a > 0$.
On a : $\forall\, x \in [a,+\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).
Donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2} = 0$ (car $\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-na^2} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-na^2}$).
Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.

d) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $]0,+\infty[$ car pour tout $x \in]0,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{n+2}{n+1} \leqslant 2$.
D'autre part, f est bornée sur $]0,+\infty[$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ existe.
On a $\left|f_n(\dfrac{1}{\sqrt{n}}) - f(\dfrac{1}{\sqrt{n}})\right| = \dfrac{(n+2)\mathrm{e}^{-1}\cos 1}{n+1}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})\right| = \mathrm{e}^{-1}\cos 1 \neq 0.$$

Or $\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})|$, donc

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[$.

III. Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

1) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\|P_n - f\|_\infty \leqslant 1/2$ et donc $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant 1$.
Seules les fonctions polynomiales constantes sont bornées sur $\mathbb{R}$ donc $P_n - P_N$ est une fonction polynomiale constante. Posons λ_n la valeur de celle-ci.

2) $\lambda_n = P_n(0) - P_N(0) \to f(0) - P_N(0) = \lambda_\infty$. $P_n = P_N + P_n - P_N \underset{CS}{\longrightarrow} P_N + \lambda_\infty$ donc par unicité de limite $f = P_N + \lambda_\infty$ est une fonction polynomiale.

IV. Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

1) Pour $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$ sur $[0, 1]$.

On a $\forall\, x \in [0, 1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2 + 1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)}{n + x}$,

et donc : $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$ (majoration indépendante de x).

Donc $||f_n - f||_\infty \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2\mathrm{e}}{n} = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2) Par convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, on peut intervertir limite et intégrale.
On a donc $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n + x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 + 1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3$.

V. Utilisation du théorème de convergence dominée

Essayons d'appliquer le théorème de convergence dominée.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n \ :]0, a] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1\right)$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0, a]$.

— Soit $x \in]0, a]$. On sait : $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$, donc : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
Ainsi, $f_n \overset{C.S}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$ sur $]0, a]$, où :

$$f \ :]0, a] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

— f est continue par morceaux (car continue) sur $]0, a]$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque : $\forall\, t \in]-1, +\infty[,\ \ln(1 + t) \leqslant t$,
on a : $\forall\, t \in [0, +\infty[,\ 1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$,
d'où, pour tout $x \in]0, a]$: $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right)^n = \mathrm{e}^x$,
puis : $0 \leqslant \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n - 1 \leqslant \mathrm{e}^x - 1$,
et enfin : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.
L'application f est continue par morceaux sur $]0, a]$, positive, et intégrable sur $]0, a]$ car $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.
D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^a f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a f$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^a \frac{1}{x}\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$$

VI. Recherche d'un équivalent d'une intégrale à paramètre entier naturel

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale

$I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \mathrm{d}x$, existe comme intégrale d'une application continue sur un segment.

Effectuons un changement de variable. Posons $\varphi(x) = x^n$. Alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 (nx^{n-1}) \times \frac{x}{x^n} \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 \varphi'(x)\frac{(\varphi(x))^{1/n}}{\varphi(x)} \ln(1+\varphi(x))\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \frac{t^{1/n}}{t} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^1 t^{\frac{1}{n}}\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{\text{notée } J_n}
\end{aligned}$$

où J_n est d'ailleurs une intégrale de fonction intégrable sur $]0,1]$.

Pour obtenir la limite de J_n (si elle existe), nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n \;:\;]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto t^{\frac{1}{n}}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $]0,1]$.
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S} f$, où $f \;:\;]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$, car, pour $t \in]0,1]$ fixé, on a $t^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- f est continue par morceaux (car continue) sur $]0,1]$.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,1]$:

$$|f_n(t)| = t^{\frac{1}{n}}\frac{\ln(1+t)}{t} \leqslant \frac{\ln(1+t)}{t}$$

et l'application $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue par morceaux (car continue), positive, intégrable sur $]0,1]$, puisque $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$. Ceci montre que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f$$

Ainsi : $\quad J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}.$

On conclut : $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+x^n\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{n}.$