VI. Suites de fonctions

31 octobre 2024

Table des matières

B - Suites et séries de fonctions

Cette section a pour objectif de définir différents modes de convergence d'une suite, d'une série de fonctions et d'étudier le transfert à la limite, à la somme des propriétés des fonctions.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	
b) Régularité de la limite d'une suite de fonctions	
Continuité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors : $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$	
Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ et de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j < k$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

e) Suites et séries de fonctions intégrables	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.	
Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$	La démonstration est hors programme.

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et (f_n) est une ***suite de fonctions*** définies sur I : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{K}$.
Nous nous posons la question suivante : est-il possible de définir la convergence d'une suite de fonctions ? Nous allons voir qu'il existe plusieurs manières de considérer qu'une suite de fonctions converge. Plus précisément, nous allons étudier deux types de convergence – mais il en existe d'autres.

1 Convergence simple et convergence uniforme

1.1 Convergence simple

La convergence la plus intuitive est la convergence dite ***simple*** :

Définition 1.1.1 (Convergence simple)**.**
On dit que la suite de fonctions (f_n) ***converge simplement*** vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ si pour tout $x \in I$ fixé, la suite de scalaires $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$:

$$\forall\, x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

La fonction f s'appelle alors la ***limite simple*** de la suite (f_n).

Remarque 1.1.2.

- On pourra utiliser la notation $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$, mais elle n'est pas officielle.
- Cette définition s'écrit de manière quantifiée :
$$\forall\, x \in I,\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$
$$(n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

  Dans cette phrase, n_0 dépend de x, cela sera important dans la suite !!

  Cette définition présente de nombreux inconvénients.

Exemple 1.1.3. 1. La fonction f peut être discontinue même si les f_n sont continues : si $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, alors $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to1^-} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to1^-} f_n(x)$: on ne peut pas toujours intervertir les limites.

2. si les f_n convergent simplement vers f, et que les f_n et f sont dérivables, la suite (f_n') peut ne pas converger, et si elle converge ce n'est pas forcément vers f'.
Si $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{n}\sin(nx)$, alors $f : x \mapsto 0$. Ainsi $f' = 0$, mais $f_n'(x) = \cos(nx)$, qui ne tend pas vers 0 : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$.
3. L'intégrale de la limite n'est pas toujours égale à la limite de l'intégrale.
Si $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n^2x^n(1-x)$, alors $f = 0$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f = 0$ mais $\displaystyle\int_0^1 f_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: $\displaystyle\int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Cette convergence présente peu de propriétés :

Proposition 1.1.4.

1. Si (f_n) converge simplement vers f sur I, et si $J \subset I$, alors $(f_n|_J)$ converge simplement vers $f|_J$ sur J.
2. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$, $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} g$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f_n + \lambda g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f + \lambda g$.

Exercice 1.1.5.
Montrer que les propriétés suivantes, si elles sont vérifiées par toutes les fonctions de la suite (f_n), sont aussi vérifiées par leur limite simple f :

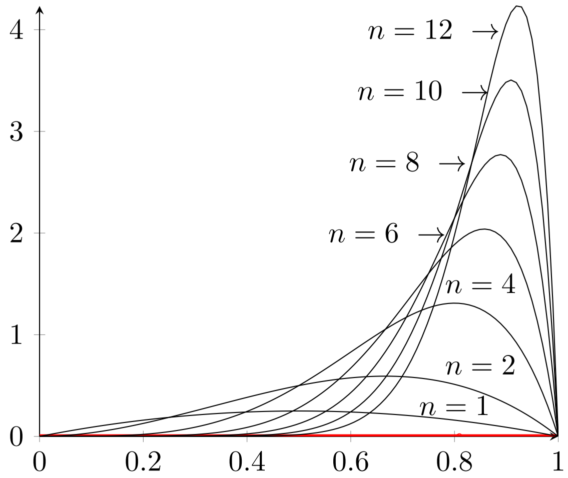

FIGURE 1 – Convergence simple de $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$

1. La croissance, la décroissance, la monotonie ;
2. La positivité, le fait d'être minorée (ou majorée) par un réel donné (le même pour toutes les f_n), d'avoir une image incluse dans une partie fermée donnée ;
3. Le fait d'être inférieure ou égale (ou supérieure ou égale) à une fonction donnée (la même pour toutes les f_n) ;
4. La convexité, la concavité ;
5. Le fait d'être K-lipschitzien (où K est un réel positif donné, le même pour toutes les f_n) ;
6. La linéarité.

Exercice 1.1.6.
Trouver un exemple de suite (f_n) vérifiant les propriétés suivantes, mais pas leur limite simple :

1. La continuité (ponctuelle ou globale), la dérivabilité (ponctuelle ou globale) ;
2. L'injectivité, la surjectivité ;
3. La stricte croissance, la stricte décroissance, la stricte monotonie, etc. Plus généralement, on se souviendra que les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite ;
4. Le fait d'être majorée, minorée, bornée, et le fait de ne pas l'être ;
5. Le fait d'être lipschitzienne.

Pour cette raison, nous allons considérer une autre convergence.

1.2 Convergence uniforme

Rappel 1.2.1.
Quelle est la différence entre ces deux phrases :

$$\forall\, x \in A,\ \exists\, M \in \mathbb{R},\ x \leqslant M$$
et
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in A,\ x \leqslant M\ ?$$

Ou si vous préférez :

« Pour toute poule il existe un œuf dont est sortie cette poule »
et
« Il existe un œuf dont toutes les poules sont sorties » ?

Définition 1.2.2 (Convergence uniforme)**.**
On dit que (f_n) ***converge uniformément*** vers f si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La fonction f s'appelle alors la ***limite uniforme*** de la suite (f_n).

Remarque 1.2.3.

- On pourra utiliser la notation $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$, mais elle n'est pas officielle.
- Cette définition s'écrit de manière quantifiée :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

On notera bien l'inversion des quantificateurs par rapport au second point de **1.1.2** ici n_0 ne dépend pas de x !! D'où l'utilisation du mot « uniforme ».

Remarque 1.2.4 (Norme de la convergence uniforme)**.**
La norme $\|.\|_\infty$ est aussi appelée ***norme de la convergence uniforme***. En effet, si l'on note $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$, alors si les f_n et f sont bornées la convergence uniforme correspond à la convergence dans l'evn $(\mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.

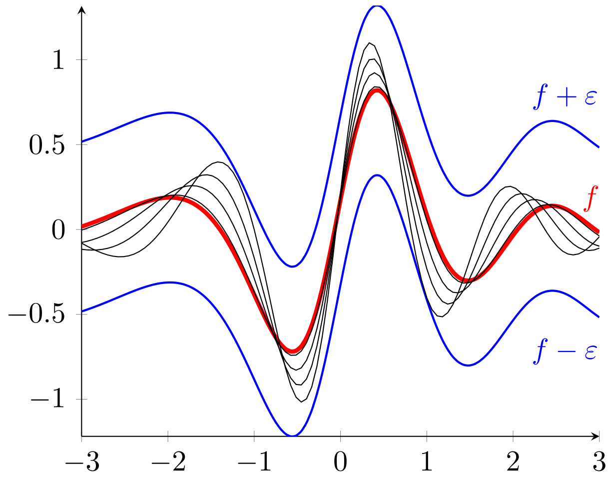

FIGURE 2 – Interprétation graphique de la convergence uniforme

Proposition 1.2.5 (La convergence uniforme implique la convergence simple)**.**
Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$, alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

Démonstration.
Fixons $x \in I$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$. On conclut par théorème des gendarmes. □

Il existe essentiellement deux méthodes pour montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément :

Exemple 1.2.6.
(Montrer une convergence uniforme)**.**

1. On commence par montrer que (f_n) converge simplement, et on trouve une expression de la limite f. Si à partir d'un certain rang $(f_n - f)$ est bornée et que l'on sait calculer sa norme infini, il ne reste qu'à montrer que cette norme tend vers 0. Le calcul de $\|f_n - f\|_\infty$ peut se faire par l'étude des variations de $(f_n - f)$.

   Appliquer cette méthode à $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$. On pourra utiliser la formule de Stirling, que l'on rappelle : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

2. On commence là encore par calculer la limite simple f, mais on ne calcule pas $\|f_n - f\|_\infty$ (souvent parce qu'on ne sait pas le faire). Plus simplement, on majore, pour tout $x \in I$, $(f_n - f)(x)$ par une suite (u_n) qui tend vers 0, u_n ne dépendant pas de x. Ceci revient donc à majorer $\|f_n - f\|_\infty$ par une suite tendant vers 0 : (u_n) ne dépendant pas de x, on appelle cela une ***majoration uniforme***. On conclut par encadrement.

   Appliquer cette métode à la suite $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}\mathrm{e}^{-x^2}$.

Exemple 1.2.7.
La réciproque du résultat **1.2.5** est fausse.
Reprendre les exemples **1** et **3** de **1.1.3** : ces suites de fonctions ne convergent pas uniformément.
On peut montrer de plusieurs manières qu'une suite ne converge pas uniformément :

— Dans les cas les plus grossiers, la suite $\|f_n - f\|_\infty$ n'est pas bornée, et ainsi la convergence ne peut être uniforme ;

— On peut calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ et montrer qu'elle ne tend pas vers 0 ;

— On peut exhiber une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n - f)(x_n) \not\to 0$.

Nous verrons d'autres méthodes plus simples que les deux dernières dans la section suivante.

L'exemple **3** présente un « pic » glissant et s'écrasant vers la droite en 1. C'est un phénomène assez typique des suites convergeant simplement mais pas uniformément.

Dans le même genre on peut considérer $f_n = \begin{cases} 1 & \text{sur } [n, n+1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$, qui converge simplement mais pas uniformément vers 0 et présente une « bosse » se déplaçant vers $+\infty$.

Terminons cette section par quelques propriétés générales de la convergence uniforme, avant de passer ensuite aux propriétés plus importantes :

Proposition 1.2.8.
Soit (f_n) et (g_n) convergeant uniformément sur I vers f et g respectivement.

1. Si $B \subset I$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur B ;
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f_n + \lambda g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f + \lambda g$;
3. Si toutes les f_n sont bornées, alors f aussi.

Démonstration.
3. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel $\|f_n - f\|_\infty < 1$. Alors $\|f\|_\infty \leqslant \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty << 1 + \|f_{n_0}\|_\infty$. □

Remarque 1.2.9.
Le dernier point permet d'affirmer que si les f_n sont bornées mais pas f, alors la convergence n'est pas uniforme.

1.3 Convergence uniforme sur tout segment

Définition 1.3.1 (Convergence uniforme sur tout segment)**.**
On dit que (f_n) ***converge uniformément vers f sur tout segment*** si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[a, b]$.

Exercice 1.3.2.
Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes – s'il n'y a pas convergence uniforme sur le domaine de définition, trouver des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme :

1. $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$.
2. $g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^\alpha x^2 \exp(-nx) \end{array}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $h_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n+x}{1+nx} \end{array}$.
4. $k_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\frac{n}{n+1}x\right) \end{array}$.

Remarque 1.3.3.
On voit donc que la convergence uniforme sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur I, même si la réciproque est vraie. La notion de convergence uniforme sur tout segment aura tout de même son importance dans la suite.

1.4 Autres types de convergences

À titre culturel, il existe d'autres types de convergence, en particulier ceux reliés à d'autres normes que la norme infini :

- (f_n) ***converge en moyenne*** vers f sur I si $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\int_I |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cette définition n'a de sens que pour les fonctions intégrables sur I.

- (f_n) ***converge en moyenne quadratique*** vers f sur I si $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\int_I (f_n - f)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cette définition n'a de sens que pour les fonctions de carré intégrable.

2 Continuité

Théorème 2.0.1 (Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions vérifiant :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue ;

(ii) (f_n) converge uniformément vers une fonction f.

Alors, f est continue.

Démonstration.
Fixons $x \in I$ et montrons que f est continue en x, c'est-à-dire :

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in I,\\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{1}$$

Nous avons par hypothèse les deux assertions suivantes, par continuité des f_n, et par convergence uniforme :

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in I,\\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}\ ;\end{gathered} \tag{2}$$

et

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in N,\\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \|f_n - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.\end{gathered} \tag{3}$$

Soit donc $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Nous allons exploiter l'inégalité triangulaire. Si $n \in \mathbb{N}$ et $y \in I$,

$$\begin{aligned}&|f(x) - f(y)|\\ &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)|\\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|\\ &\leqslant 2\,\|f_n - f\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)|.\end{aligned} \tag{4}$$

Pour cet ε, soit α tel que (2) est vérifiée, et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (3) est vérifiée. Soit $y \in I$ tel que $|x-y| < \alpha$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. L'inéquation (4) donne alors $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$: c'est bien (1). □

Remarque 2.0.2.

- Ce résultat permet de montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément : pour tout n, $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0,1]$, mais la limite simple n'est pas continue. Il n'y a donc pas convergence uniforme.
- Attention, les f_n et f peuvent être continues sans qu'il y ait convergence uniforme. Considérer par exemple $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$.
- Sous les hypothèses de **2.0.1**, si $a \in I$, alors $\lim\limits_{x\to a} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$: c'est un résultat d'interversion de limites.

Corollaire 2.0.3 (Continuité et convergence uniforme sur tout segment)**.**
Si les f_n sont continues et si (f_n) converge uniformément sur tout segment vers f, alors f est continue sur I.

Démonstration.
On notera bien que les hypothèses n'impliquent pas la convergence uniforme sur I. Mais elles sont suffisantes pour obtenir la continuité de f.
Grâce à **2.0.1**, f est continue sur tout segment inclus dans I. Or si $x \in I$, il existe $a, b \in I$ tel que $a \leqslant x \leqslant b$, donc $x \in [a,b]$: f est ainsi continue en x et donc sur I. □

3 Interversion limite - intégrale

3.1 Intégration sur un segment

Théorème 3.1.1 (Intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions vérifiant :

(i) les (f_n) sont définies sur I et I est un **segment** $[a,b]$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue ;

(iii) (f_n) converge uniformément vers une fonction f.

Alors,

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f,$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n\right) = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n).$$

Démonstration.

L'hypothèse de continuité des f_n assure que les $\displaystyle\int_a^b f_n$ existent, et par convergence uniforme f est également continue et $\displaystyle\int_a^b f$ existe aussi. Ensuite,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| &\leqslant \int_a^b |f_n - f| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty \int_a^b 1 \\ &\leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty\end{aligned}$$

et on conclut par théorème des gendarmes. □

3.2 Intégration sur un intervalle quelconque

Théorème 3.2.1 (Théorème de convergence domninée)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I vérifiant :

(i) (f_n) converge simplement vers f sur I ;

(ii) (f_n) satisfait ***l'hypothèse de domination*** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

où φ est indépendante de n et intégrable sur I ;

(iii) les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

Alors

(a) les fonctions f_n et f sont intégrables sur I ;

(b) la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_n$ converge ;

(c) $\displaystyle\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n\right) = \int_I (\lim_{n\to+\infty} f_n)$.

Remarque 3.2.2.

- Ce théorème implique le résultat d'interversion limite - intégrale sur un segment : il suffit de prendre une fonction constante pour φ.
- Il est vérifié dans deux cas particuliers :
  — Si (f_n) est une suite décroissante de fonctions positives, il suffit de prendre $\varphi = f_0$.
  — Si (f_n) est une suite croissante de fonctions, il suffit de prendre $\varphi = f$.

Attention de ne pas confondre « suite décroissante de fonctions » et « suite de fonctions décroissantes » !

Exercice 3.2.3.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sans calculer ces intégrales.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$
3. Revenir au troisième exemple de **1.1.3** et expliquer pourquoi aucun des deux théorèmes d'interversion limite - intégrale ne s'applique.

4 Dérivabilité

4.1 Théorème de dérivation

Théorème 4.1.1 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions dérivables)**.**
Soit (f_n) une suite de fonctions vérifiant :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$;

(ii) (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;

(iii) la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g.

Alors

(a) $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$;

(b) $f' = g$.

Démonstration.
Soit $a \in I$. Montrons que f est dérivable sur I et que $f' = g$.
Commençons par remarquer que, comme la suite de fonctions continues (f_n') converge uniformément sur I, d'après le théorème de continuité **2.0.1**, sa limite g est continue.
De plus, d'après le théorème d'interversion limite-intégrale **3.1.1**, on a, pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^x f_n' = \int_a^x g$.
On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a)$. Par convergence simple et pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^x f_n = f(x) - f(a)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x g$.
Comme g est continue, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'analyse que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que $f' = g$. □

Remarque 4.1.2.

- Comme pour la continuité, on peut se contenter de la convergence uniforme des f_n' sur tout segment de I puisque la dérivation est, comme la continuité, un problème local.
- Supposer uniquement que (f_n) converge uniformément vers f et que les f_n sont dérivables ne suffit pas pour que f soit dérivable.
- Avec les bonnes hypothèses on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.

Exercice 4.1.3.
Étudier la convergence et la dérivabilité de la limite de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

4.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Théorème 4.2.1.
(Fonction limite de classe $\mathscr{C}^k$)**.**
Soit $k \in \mathbb{N}$ et (f_n) une suite de fonctions vérifiant :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement sur I vers une fonction g_j ;

(iii) la suite $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k.

Alors :

(a) la limite simple g_0 de (f_n) est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;

(b) pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Démonstration.
On prouve le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Le résultat à l'ordre 1 n'est autre que le théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour toute suite de fonctions (f_n) de classe $\mathscr{C}^k$ sur I telle que, $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(j)}\right)$ converge simplement vers une fonction g_j et $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k, la fonction g_0 soit de classe $\mathscr{C}^k$ et $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $g_0^{(j)} = g_j$.
Soit (f_n) une suite de fonctions vérifiant les hypothèses de l'énoncé à l'ordre $k+1$.

Soit $J=[a,b]$ un segment de I. Montrons que la suite $\left(f_n^{(k)}\right)$, qui converge simplement vers g_k, converge en fait uniformément sur J.
En appliquant le théorème de dérivation à la suite $\left(f_n^{(k)}\right)$, on obtient que g_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que $g_k'=g_{k+1}$. Alors, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}&\left|f_n^{(k)}(x)-g_k(x)\right|\\ =&\left|\int_a^x\left(f_n^{(k+1)}(t)-g_{k+1}\right)\mathrm{d}t+\left(f_n^{(k)}(a)-g_k(a)\right)\right|\\ \leqslant&\int_a^b\left|f_n^{(k+1)}(t)-g_{k+1}\right|\mathrm{d}t+\left|f_n^{(k)}(a)-g_k(a)\right|\\ \leqslant&|b-a|\times\left\|f_n^{(k+1)}-g_{k+1}\right\|_\infty+\left|f_n^{(k)}(a)-g_k(a)\right|\end{aligned}$$

Par convergence simple, la suite numérique $\left(f_n^{(k)}(a)\right)$ converge vers $g_k(a)$ et, par convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n^{(k+1)}\right)$ vers g_{k+1}, on obtient que le majorant ci-dessus converge vers 0.
D'où la convergence uniforme de $\left(f_n^{(k)}\right)$ sur tout segment de I.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\forall\, l\in[\![0,k-1]\!]$, la fonction g_l est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a $g_l'=g_{l+1}$. Or, on sait déjà que f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que $f_k'=f_{k+1}$. D'où le résultat à l'ordre $k+1$. □

Remarque 4.2.2.

- Comme pour la continuité, on peut se contenter de la continuité uniforme des $f_n^{(j)}$ sur tout segment de I.
- Avec les bonnes hypothèses on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}f_n(x)\right)=\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right)$.

5 Exercices classiques

5.1 Limite uniforme d'un produit

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un intervalle réel I, et convergeant uniformément vers f et g respectivement.

1. Montrer que f est bornée si et seulement si à partir d'un certain rang toutes les f_n sont bornées.
2. Montrer que si f et g sont bornées, alors (f_ng_n) converge uniformément vers fg.
3. Soit h une fonction bornée. Montrer que (f_nh) converge uniformément vers fh, sans supposer que f est bornée.
4. Montrer que ce dernier résultat est faux si h n'est pas bornée.

5.2 Étude du type de convergence (banque CCP MP)

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x)=\dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(x\sqrt{n})$.
   a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   c) Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?
   d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

5.3 Limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, on ait pour tout réel x, $|P_n(x)-P_N(x)|\leqslant 1$.
   Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes P_n-P_N lorsque $n\geqslant N$?
2. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

5.4 Interversion limite - intégrale sur un segment (banque CCP MP)

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^{\,x} + x\mathrm{e}^{\,-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{\,x} + x\mathrm{e}^{\,-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

5.5 Utilisation du théorème de convergence dominée

Montrer, pour tout $a \in [0;+\infty[$ fixé : $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^a \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$.

5.6 Recherche d'un équivalent d'une intégrale à paramètre entier naturel

Trouver un équivalent simple, lorsque l'entier n tend vers l'infini, de $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$, on admettra : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$.