Variables aléatoires discrètes

I. Premier tirage d'une boule (Banque CCP MP)

1) $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
$\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
$\forall\, i \in [\![1, 2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

$(X = 1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X = 1) = \dfrac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n}{n+2}$.

$(X = 2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X = 2) = \dfrac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.

$(X = 3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
Donc $P(X = 3) = \dfrac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.

$X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.

$(X = 1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
Donc $P(X = 1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n+2}$.

$(X = 2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
D'où $P(X = 2) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

$(X = 3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
D'où $P(X = 3) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2) $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
L'événement $(Y = k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

Donc $P(Y = k) = \dfrac{\dbinom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$

Donc $P(Y = k) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
$Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

On a : $(Y = k) = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.

Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y = k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.

$P(Y=k)=\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{(n+2)-1}\times\dfrac{n-2}{(n+2)-2}\times...\times\dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)}\times\dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$

$P(Y=k)=\dfrac{n}{n+2}\times\dfrac{n-1}{n+1}\times\dfrac{n-2}{n}\times...\times\dfrac{n-k+2}{n-k+4}\times\dfrac{2}{n-k+3}$.

$P(Y=k)=2\,\dfrac{n!}{(n-k+1)!}\times\dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.

$P(Y=k)=\dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

II. Loi d'un couple et lois marginales

1) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=8a$$

car

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j+k}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^j}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}=\frac{1}{(1-1/2)^2}=4$$

On en déduit $a=1/8$

2) Pour $j\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{j+1}{2^{j+2}}$$

et pour $k\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}$$

3) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)\neq\mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=k)$$

pour $j=k=0$.

4) Par probabilités totales

$$\mathrm{P}(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n+3}}=\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^{n-1}}=\frac{1}{9}$$

III. Max et min de deux lois géométriques (Banque CCP MP)

1) $(U,V)(\Omega)=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } m\geqslant n\}$. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m\geqslant n$.
Premier cas : si m=n
$P((U=m)\cap(V=n))=P((X=n)\cap(Y=n))=P(X=n)P(Y=n)$ car X et Y sont indépendantes.
Donc $P((U=m)\cap(V=n))=p^2q^{2n}$.
Deuxième cas : si m>n
$P((U=m)\cap(V=n))=P([(X=m)\cap(Y=n)]\cup[(X=n)\cap(Y=m)])$
Les événements $((X=m)\cap(Y=n))$ et $((X=n)\cap(Y=m))$ sont incompatibles donc :
$P((U=m)\cap(V=n))=P\left((X=m)\cap(Y=n)\right)+P\left((X=n)\cap(Y=m)\right)$.
Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :
$P((U=m)\cap(V=n))=2P(X=m)P(Y=n)=2p^2q^{n+m}$.

Bilan : $P((U=m)\cap(V=n))=\begin{cases}p^2q^{2n} & \text{si } m=n\\ 2p^2q^{n+m} & \text{si } m>n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

2) $U(\Omega)=\mathbb{N}$ et $V(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $m\in\mathbb{N}$.
$P(U=m)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P((U=m)\cap(V=n))$. (loi marginale de (U,V))

Donc d'après 1., $P(U=m)=\displaystyle\sum_{n=0}^{m}P((U=m)\cap(V=n))\quad(*)$

Premier cas : $m\geqslant 1$

D'après $(*)$, $P(U=m)=P((U=m)\cap(V=m))+\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}P((U=m)\cap(V=n))$.

Donc $P(U=m)=p^2q^{2m}+\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}2p^2q^{n+m}=p^2q^{2m}+2p^2q^m\sum_{n=0}^{m-1}q^n=$

$p^2q^{2m} + 2p^2q^m\dfrac{1-q^m}{1-q} = p^2q^{2m} + 2pq^m(1-q^m)$
Donc $P(U=m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.
Deuxième cas : $m = 0$

D'après $(*)$ et 1., $P(U=0) = P((U=0)\cap(V=0)) = p^2$.
Bilan : $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $P(U=m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.

3) $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(W=n) = P(V=n-1) = pq^{2(n-1)}(1+q) = (1-q)q^{2(n-1)}(1+q)$.
Donc $P(W=n) = (1-q^2)\left(q^2\right)^{n-1}$.
Donc W suit une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

4) $P((U=0)\cap(V=1)) = 0$ et $P(U=0)P(V=1) = p^3q^2(1+q) \neq 0$. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

IV. Couples de variables aléatoires de Poisson (Banque CCP MP)

1) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1+X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} ((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).
Donc :

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=n) &= \sum_{k=0}^{n} P\left((X_1=k)\cap(X_2=n-k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} P\left((X=k)\cap(Y=m)\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X=k)P(Y=m)$.

Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ P_{(Y=m)}(X=k) = \begin{cases} \dbinom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} & \text{si } k \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ainsi $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.