XII. Variables aléatoires discrètes

8 décembre 2024

Table des matières

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
d) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Relation $P(X > k) = (1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désignera un espace probabilisé.

1. Variables aléatoires discrètes

1.1. Définition

Définition 1.1.1 (Variable aléatoire discrète)**.**
On appelle ***variable aléatoire*** définie sur Ω toute application $X : \Omega \to E$, où E est un ensemble quelconque, vérifiant les points suivants :

(i) l'ensemble des valeurs prises par X, $X(\Omega)$, est fini ou dénombrable ;

(ii) pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$ est un élément de la tribu $\mathscr{A}$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

Remarque 1.1.2.
1. Une variable aléatoire n'est pas une variable, c'est tout simplement une fonction. Comme souvent, en probabilités on utilise un vocabulaire particulier, qui n'est pas utilisé dans les autres domaines des mathématiques.
2. L'ensemble $X(\Omega)$ doit être au plus dénombrable. Par contre l'univers Ω (qui en pratique sera très rarement précisé) peut très bien être infini non dénombrable.
3. L'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est plus souvent noté $(X = x)$ ou $[X = x]$. Là aussi, la notation peut-être déroutante. Par exemple en dehors des probabilités, $\pi\mathbb{Z}$ est noté $\sin^{-1}(\{0\})$ et jamais $(\sin = 0)$.
4. Il faut que $(X = x) \in \mathscr{A}$ car nous allons par la suite considérer $P(X = x)$.

Exemple 1.1.3.
1. On tire avec remise n boules dans une urne contenant N boules, de couleur noire ou blanche. On note X le nombre de boules blanches tirées : X est une variable aléatoire discrète (finie), à valeurs dans $[\![0, \max(n, N)]\!]$.
2. On lance indéfiniment une pièce et on note X le rang du premier Pile obtenu. X est une variable aléatoire discrète (infinie), à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1.2. Évènements associés à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω. En plus de $(X = x)$, nous utiliserons les notations suivantes :

— Si $A \subset X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A\}$ est noté $(X \in A)$.

— Si X est une variable aléatoire réelle, et si $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(]-\infty, a])$ sera noté $(X \leqslant a)$. On définit de même, de la manière à laquelle on s'attend, les ensembless $(X < a)$, $(X \geqslant a)$, $(X > a)$, et parfois même $(a \geqslant X < b)$ et toutes les variantes imaginables, si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Théorème 1.2.1.
Tous ces ensembles sont des évènements – ils appartiennent à la tribu $\mathscr{A}$.

Démonstration.
Démontrons-le pour le cas général $(X \in A)$ où $A \subset X(\Omega)$.
Il suffit de remarquer que $(X \in A) = \bigcup_{a \in A} (X = a)$. Puisque $A \subset X(\Omega)$, A est dénombrable, donc cette réunion est une réunion dénombrable d'évènements : c'est aussi un évènement. □

Remarque 1.2.2.
Si $A, B \subset X(\Omega)$, nous avons les propriétés suivantes :

$$(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$$

$$(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$$

$$\overline{(X \in A)} = (X \in \bar{A})$$

L'évènement $(X \in A) \cap (X \in B)$ est souvent noté $(X \in A,\ X \in B)$.

Remarque 1.2.3.
Si $I = \mathbb{N}$ ou $[\![1, n]\!]$, et si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $X(\Omega)$, alors $([X \in A_i])_{i\in I}$ est un système complet d'évènements.
En particulier si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $([X = x_i])_{i\in I}$ est un système complet d'évènements.

1.3. Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 1.3.1 (Variable aléatoire composée)**.**
Soit E, F deux ensembles quelconques.
Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire sur Ω, et si $f : E \to F$ est une fonction, alors $Y = f \circ X$ est une fonction de Ω dans F.
C'est aussi une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans F, que l'on notera $f(X)$.

Démonstration.
Il s'agit de vérifier que pour tout $y \in Y(\Omega)$, $(Y = y) \in \mathscr{A}$.
Pour cela, observons que $(Y = y) = \bigcup\limits_{x\in\Omega,\ f(x)=y} (X = x)$. C'est un évènement en tant que réunion dénombrable d'évènements. □

Remarque 1.3.2.

1. Encore une fois, la notation $f(X)$ est propre aux probabilités, et ne sera jamais utilisée en dehors de ce domaine. On n'écrira jamais sin(ln), qui n'a aucun sens.
2. Si X est une variable aléatoire, on pourra écrire $aX + b$, X^2, $\sqrt{X}$, $|X|$, e^X etc.

2. Loi d'une variable aléatoire discrète

2.1. Définition

Définition 2.1.1 (Loi d'une variable aléatoire discrète)**.**
Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète. On appelle ***loi de*** X la fonction

$$P_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P(X = x) \end{array}.$$

Remarque 2.1.2.

1. Cette fonction est bien définie car $(X = x)$ est un évènement.
2. $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.
   Donc $\Omega = \bigsqcup\limits_{x\in X(\Omega)} (X = x)$ et par conséquent $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} P_X(\{x\}) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} P(X = x) = 1$. Ainsi P_x est un germe de probabilité sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$, d'où la proposition suivante.

Proposition 2.1.3.
Pour une variable aléatoire discrète, il est alors possible de construire une probabilité sur $X(\Omega)$, que l'on notera encore P_X, de la manière suivante :

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}.$$

On pourra aussi l'appeler ***loi de*** X car elle entièrement déterminée par sa valeur sur les singletons.

Démonstration.
Cette construction est possible car $X(\Omega)$ est un univers dénombrable. Nous avons alors $P_X(A) = \sum\limits_{a\in A} P(X = a)$. □

Remarque 2.1.4.
Lorsqu'il est demandé de déterminer la loi d'une variable aléatoire X, il s'agit de commencer par déterminer $X(\Omega)$, et ensuite de donner la valeur

de $P(X = x)$ pour chaque $x \in X(\Omega)$.
Pour finir, si possible, il conviendra de reconnaître une loi usuelle (les lois usuelles seront rappelées ou données plus loin).

Exercice 2.1.5.

1. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et telle que $P(X = -1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$.
   Déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.
2. On lance une infinité de fois une pièce et on appelle X la variable aléatoire donnant le numéro du premier lancer pour lequel Face apparaît.
   Donner la loi de X.

Notation 2.1.6.
Si deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un même ensemble suivent la même loi, on notera $X \sim Y$.

Remarque 2.1.7.
Attention, la loi d'une variable X ne permet en rien de définir la fonction X. Ainsi X et Y peuvent avoir la même loi tout en étant très différentes en tant que fonctions.
Par exemple, soit X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ dont la loi est déterminée par

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

Quelle est la loi de $-X$? A-t-on $X = -X$?

Proposition 2.1.8.
Soit E, F deux ensembles, X, Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans E, et $f : E \to F$.
Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si $y \in f(X(\Omega))$, $(f(X) = y) = \{\omega \in \Omega,\ f(X(\omega)) = y\} = \left\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\right\} = (X \in f^{-1}(\{y\}))$. Donc $P(f(X) = y) = P(X \in f^{-1}(\{y\})) = P(Y \in f^{-1}(\{y\})) = P(f(Y) = y)$. □

2.2. Loi conditionnelle

Définition 2.2.1 (Loi conditionnelle)**.**
Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement.
Soit $x \in E$ tel que $P(X = x) > 0$. On définit la ***loi conditionnelle*** de Y sachant $(X = x)$ par

$$\forall B \in \mathscr{P}(F),\ P_{Y|(X=x)}(B) = P_{(X=x)}(Y \in B) = \frac{P(Y \in B, X = x)}{P(X = x)}$$

Remarque 2.2.2.
La loi de Y sachant $(X = x)$ est donc la loi d'une variable aléatoire ... qui s'appelle Y, ... mais qui n'a pas même loi que Y ... ! On a changé la probabilité sur l'espace de départ, ce qui change la loi de Y. Autrement dit, la loi de Y sachant $(X = x)$, c'est bien (la loi de Y) (sachant $(X = x)$), ce n'est pas (la loi de) (Y sachant $(X = x)$).

Proposition 2.2.3.
La loi conditionnelle $P_{Y|(X=x)}$ est une probabilité sur F.

Remarque 2.2.4.
La loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ se caractérise par les probabilités des événements élémentaires : en effet, si on connaît les

$$P_{Y|(X=x)}(\{y\}) = P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P(Y = y, X = x)}{P(X = x)}$$

alors on peut écrire, pour toute partie B de F,

$$P_{Y|(X=x)}(B) = \sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P_{(X=x)}(Y=y) = \sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} \frac{P(Y=y, X=x)}{P(X=x)}.$$

Nous reviendrons sur les probabilité conditionnelles dans la section sur les couples de variables aléatoires.

3. Lois usuelles

3.1. Rappels : lois usuelles finies

Dans cette partie, on étendra automatiquement les définitions données en commettant l'abus de notation suivant. Soit X une variable aléatoire X à valeurs dans E, $A \subset E$ tel que $\forall x \in E \backslash A, P(X=x) = 0$ et $\forall a \in A, P(X=a) > 0$ (on dit que A est le support de la loi de X). Formellement, $X(\Omega) = E$, mais on étendra les définitions suivantes comme si $X(\Omega) = A$.

Exemple 3.1.1.
Si $X : \Omega \to \{1,2,3,4\}$, avec $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \dfrac{1}{3}$ et $P(X=4) = 0$, on s'autorisera à dire que X suit la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.

a. Loi uniforme

Définition 3.1.2.
Soit E un ensemble fini, non vide. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit *la loi uniforme* sur E et on note $X \sim \mathscr{U}(E)$ si $X(\Omega) = E$ et P_X est la probabilité uniforme sur E (autrement dit, pour tout $x \in E$, $P(X=x) = 1/\operatorname{Card} E$).

En particulier pour tout couple (a,b) d'entiers relatifs avec $a \leqslant b$, on a $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$ si et seulement si

$$\forall x \in \llbracket a,b \rrbracket \quad P(X=x) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Exemple 3.1.3.

— La variable aléatoire modélisant le nombre obtenu par tirage d'un dé équilibré à 6 faces suit la loi uniforme sur $\llbracket 1,6 \rrbracket$.

— Pour modéliser le numéro d'une boule tirée dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n on prendra une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$.

Exercice 3.1.4.
On tire deux boules *sans remise* dans une urne. Montrer que le couple des numéros tirés (dans l'ordre) suit une loi uniforme dans l'ensemble des 2-arrangements de $\llbracket 1,n \rrbracket$.

Exercice 3.1.5.
Un joueur possède quatre dés : le dé n° 1 a 4 faces, le n° 2 en a 6, le n° 3 8 et le n° 4 12. Il lance un dé à 4 faces, obtient i, lance le dé n° i et note X le résultat obtenu.

Quelle est la loi de X ?

b. Loi de Bernoulli.

Définition 3.1.6.
Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire X est une variable de Bernoulli (ou suit la loi de Bernoulli) de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si X est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $P(X=1) = p$.

Exemple 3.1.7.

— Modélisons le tirage d'une pièce à pile ou face par la variable X valant 0 si l'on obtient pile et 1 si l'on obtient face. Si la pièce est supposée équilibrée, on supposera que X suit la loi uniforme sur $\{0,1\}$; que ce soit le cas ou non, il s'agit d'une variable de Bernoulli de paramètre la probabilité d'obtenir face.

— Si X est à valeurs dans $\{0,1\}$, alors $X \sim \mathscr{B}(P(X=1))$.

— De manière générale, notons A un événement sur un espace probabilisé Ω. Alors χ_A, la fonction indicatrice de A, définie par

$$\chi_A : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A, \\ 0 \text{ si } \omega \notin A. \end{cases} \end{cases}$$

est une variable de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

Très souvent, on s'intéressera à un événement A lors d'une expérience aléatoire et on dira que l'expérience est un succès si A est réalisé et un échec si A ne l'est pas. χ_A est alors la variable de Bernoulli prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Exercice 3.1.8.
Montrer que toute variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini peut s'écrire comme une combinaison linéaire de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli.

c. Loi binomiale.

Définition 3.1.9.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ si X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple 3.1.10.

— Considérons n expériences aléatoires mutuellement indépendantes toutes de probabilité de succès p. On modélisera le nombre de succès par une variable binomiale de paramètres n et p.

— En particulier considérons une urne opaque contenant B boules blanches et N boules noires indiscernables au toucher ($B \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathbb{N}^*$), dans laquelle on tire n fois une boule, *avec* remise. Alors on modélisera le nombre de fois où l'on tire une boule noire par une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $N/(B+N)$.

Exercice 3.1.11.
On considère un joueur jouant au jeu suivant :

— Il mise un euro. Cette mise est définitivement perdue.

— Il lance quatre pièces de monnaie.

— Si exactement trois des pièces tombent sur pile, il perçoit un euro. Si les quatre pièces tombent sur pile, il perçoit dix euros.

On note X le gain du joueur (mise incluse, le gain peut donc être négatif). Donner la loi de X.

3.2. Loi géométrique

On considère une expérience de type succès-échec, et on répète l'expérience dans des conditions identiques. On supposera donc que les résultats de ces expériences sont indépendants les uns des autres. On parle d'une ***suite d'épreuves de Bernoulli identiques indépendantes***.
On note X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que l'on obtienne un succès pour la première fois. L'évènement $(X=3)$ est donc la réalisation de deux expériences ayant mené à un échec, suivie d'une troisième expérience couronnée de succès.
Notons p la probabilité d'un succès, avec $p \in]0,1[$. Les cas $p=0$ et $p=1$ n'ont pas d'intérêt. Notons également A_i l'événement « on a obtenu un succès lors de la i-ème expérience ».

Soit R l'événement « on n'obtient que des échecs ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Par continuité croissante

$$P(R) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0.$$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right) = (1-p)^{n-1}p$$

Définition 3.2.1 (Loi géométrique)**.**
Soit $p \in]0,1[$.
On dit qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suit une ***loi géométrique*** $\mathscr{G}(p)$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = (1-p)^{n-1}p.$$

On dit aussi que X est une ***variable aléatoire géométrique de paramètre*** p. On note $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Proposition 3.2.2.
Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, nous avons $P(X>n) = (1-p)^n$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(X>n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=n}^{+\infty}(1-p)^k \\ &= p.\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.3.
On en tire des égalités dans le même esprit :

$$P(X \geqslant n) = P(X > n-1) = (1-p)^{n-1}$$

$$P(X < n) = 1-(1-p)^{n-1}$$

$$P(X \leqslant n) = 1-(1-p)^n.$$

L'une des propriétés marquantes de la loi géométrique est qu'elle est ***sans mémoire*** : la loi de probabilité du nombre d'épreuves à répéter jusqu'à l'obtention d'un premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli identiques indépendantes est la même quel que soit le nombre d'échecs accumulés auparavant – cela découle de l'indépendance des épreuves qui sont toutes identiques.

Proposition 3.2.4 (La loi géométrique est sans mémoire)**.**
Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p. Alors

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ P_{(X>m)}(X > n+m) = P(X>n)$$

ou encore, de manière équivalente,

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ P_{(X>m)}(X = n+m) = P(X=n).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} P_{(X>m)}(X>n+m) &= \frac{P(X>m, X>n+m)}{P(X>m)} = \frac{X>n+m)}{P(X>m)} \\ &= \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^m} = (1-p)^n \\ &= P(X>n). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} P_{(X>m)}(X=n+m) &= P_{(X>m)}(X>n+m) - P_{(X>m)}(X>n+m+1) \\ &= P(X>n) - P(X>n+1) \\ &= P(X_n). \end{aligned}$$

□

Il est intéressant de noter la propriété suivante, qui est officiellement hors-programme :

Proposition 3.2.5.
Une variable aléatoire X suivant une loi sans mémoire est une variable aléatoire géométrique de paramètre $P(X>1)$.

Démonstration.
En effet, supposons que X soit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ vérifiant $\forall\, n,m\in\mathbb{N},\ P_{(X>m)}(X>n+m)=P(X>n)$. Alors

$$\begin{aligned}P(X>n+m)&=P_{(X>m)}(X>n+m)\times P(X>m)\\&=P(X>n)\times P(X>m).\end{aligned}$$

La suite $(P(X>n))$ est donc une suite géométrique de raison $p=P(X>1)$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(X>n)=p^n$.
Et finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $P(X=n)=P(X>n-1)-P(X>n)=p(1-p)^{n-1}$. □

3.3. Loi de Poisson

Un ***processus de Poisson*** (d'après le mathématicien français Siméon Poisson (1781-1840)) est un processus de comptage d'évènements se reproduisant au cours du temps : arrivée de clients dans une file d'attente, apparitions de pannes, désintégration radiocative ...
Le temps est divisé en intervalles disjoints. Ce modèle est construit sur les hypothèses suivantes :

- les nombres des réalisations de l'évènement considéré au cours de ces intervalles de temps sont indépendants les uns des autres ;
- la probabilité pour que l'évènement se réalise une fois au cours d'un petit intervalle de temps Δt est proportionnelle à la longueur de cet intervalle, et cette proportion est constante sur tous les intervalles, le coefficient de proportionnalité étant noté α ;
- l'évènement observé est un évènement rare, et on suppose que la probabilité qu'il survienne plus d'une fois dans un intervalle de temps est négligeable.

Si l'intervalle de temps total est de durée T, on le découpe en sous-intervalles de longueur $\dfrac{T}{n}$, où n est suffisament grand pour que la troisième hypothèse soit réaliste. On suppose alors que la variable aléatoire X_i comptant le nombre de réalisations de l'évènement sur le i-ème intervalle suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=\alpha\dfrac{T}{n}$, d'après la seconde hypothèse. On notera alors $\lambda=\alpha T$. Le nombre de réalisations X de l'évènement sur la durée T suit alors la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{n}$, d'après la première hypothèse, d'indépendance.
Alors, si $k\in[\![0,n]\!]$, $P(X=k)=\binom{k}{n}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$.
Si l'on fixe k et que l'on fait tendre n vers $+\infty$, on peut montrer que $P(X=k)\sim \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Ce raisonnement ne prouve qu'il est légitime de remplacer $P(X=k)$ par cet équivalent quand $n\to+\infty$. Mais des tests numériques montrent que si n est suffisamment grand l'approximation est plutôt bonne.
Cet équivalent motive la définition de la loi de Poisson.

Définition 3.3.1 (Loi de Poisson)**.**
Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. On dit que la variable aléatoire X suit la ***loi de Poisson de paramètre*** λ lorsque

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note alors $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$.

Remarque 3.3.2.
Si durant un laps de temps T un évènement se produit en moyenne λ fois, il est fréquent de modéliser le nombre d'occurences de cet évènement durant ce laps de temps par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Nous avons détaillé un processus où un seul même phénomène se répète durant une succession de petits intervalles de temps.

On peut aussi modéliser par la loi de Poisson la multiplication de plusieurs évènements de même nature durant un seul laps de temps.

Exemple 3.3.3.
Un centre d'assistance téléphonique est susceptible d'être appelé par des clients. On souhaite modéliser par une loi de probabilité le nombre N d'appels que ce centre reçoit pendant un intervalle de temps donné T (par exemple, $T = 1$ heure). On suppose que T est suffisament petit pour qu'il soit réaliste de considérer qu'un client n'appellera pas plus d'une fois pendant ce laps de temps.
On suppose aussi que l'on connaît le nombre moyen d'appels pendant un intervalle de temps de longueur T, et on le note λ.
Dans ce cadre, il sera fréquent de considérer que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

4. Couples de variables aléatoires

4.1. Définition, loi conjointe, lois marginales

Définition 4.1.1 (Couple de variables aléatoires discrètes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans des ensembles respectifs E et F.
Alors l'application $Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$ est une variable aléatoire, que l'on notera (X, Y). Un telle variable aléatoire sera appelée un ***couple de variables aléatoires discrètes***.

Démonstration.
Z est bien une variable aléatoire.
D'une part $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ étant dénombrables, $(X, Y)(\Omega)$ l'est aussi.
D'autre part, si $(x, y) \in E \times F$, $Z^{-1}(\{(x, y)\}) = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\})$, qui est bien dans la tribu $\mathscr{A}$ puisque cette dernière est stable par intersection finie. $\square$

Remarque 4.1.2.
Encore une fois, voilà une notation propre aux probabilités.
Malgré son nom et cette notation, (X, Y) n'est pas un couple de fonctions : c'est une fonction, qui à un évènement élémentaire associe un couple.

Définition 4.1.3 (Lois conjointe et marginales)**.**

1. On appelle ***loi conjointe*** de deux variables aléatoires X et Y, la loi du couple (X, Y), c'est-à-dire la probabilité $P_{(X,Y)}$ définie sur les singletons $\{(x, y)\}$ de $E \times F$ par
$$P_{(X,Y)}(\{(x, y)\}) = P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y).$$
2. On appelle ***première*** (resp. ***seconde***) ***loi marginale*** du couple (X, Y), la loi de X (resp. de Y).

Exemple 4.1.4.
Si l'on tire deux dés à 6 faces non pipés et que l'on note X le résultat du premier dé et Y celui du second, alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires. Il est à valeurs dans $[\![1, 6]\!]^6$. Tous les résultats étant équiprobables, pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^6$, $P(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{36}$.
La première loi marginale du couple (X, Y) est celle de X. Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, $P(X = i) = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 4.1.5.
On tire un dé équilibré à six faces et on lance une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable de Bernoulli associée à l'événement «obtenir pile» et Y la valeur tirée sur le dé.
Donner la loi conjointe de X et Y.

Exercice 4.1.6.
On tire deux dés équilibrés à quatre faces, un vert et un rouge. On appelle X la valeur obtenue sur le dé vert, Y la valeur obtenue sur le dé rouge et Z la somme des deux. Donner la loi conjointe de X et Y puis de X et Z.

Proposition 4.1.7.
Si $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$, où I et J sont deux ensembles au plus dénombrables, alors la famille $([X = x_i, Y = y_j])_{(i,j) \in I \times J}$ forme un système complet d'évènements.

Il est possible de déterminer les lois marginales à partir de la loi d'un couple. Contre-intuitivement (ou pas ?), il n'est pas possible de faire l'inverse.

Proposition 4.1.8 (Lien entre loi conjointe et lois marginales)**.**
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. Si $X(\Omega) = (x_i)_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j\in J}$, alors

$$\forall\, i \in I,\ P(X = i) = \sum_{j\in J} P(X = i, Y = j),$$

$$\forall\, j \in J,\ P(Y = j) = \sum_{i\in I} P(X = i, Y = j).$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $([Y = y_j])_{j\in J}$ pour le premier résultat, et à $([X = x_i])_{i\in I}$ pour le second. $\square$

Exercice 4.1.9.
On lance deux dés à 6 faces et l'on note X et Y le résultat de chacun. Montrer que les lois jointes de (X, X) et de (X, Y) sont différentes alors que (X, X) et (X, Y) ont les mêmes lois marginales.

Exemple 4.1.10.
Le nombre X de patients se présentant aux urgences à l'hôpital en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
L'accueil est constitué de N guichets. Chaque patient arrivant se présente à un guichet choisi au hasard. On note Y le nombre de patients se présentant au guichet n°1.
Déterminons la loi de Y.
X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Le premier point est de donner la loi de Y conditionnée par $(X = n)$. À l'arrivée d'un patient, une expérience est réalisée : le patient va aléatoirement à un guichet. On considère que l'expérience est un succès si le guichet attribué est le n°1. Si $X = n$, n expériences indépendantes sont réalisées, et ainsi loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{N}\right)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P_{(X=n)}(Y = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

On en déduit la loi du couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}\forall\, (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = n, Y = k) &= P_{(X=n)}(Y = k).P(X = n)\\ &= \binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\end{aligned}$$

avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ (et ainsi $P(X = n, Y = k) = 0$ si $k > n$).
La loi de Y s'obtient alors en sommant tout cela (les séries écrites sont forcément convergentes) :

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = k)\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}\left(\lambda\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^{n-k}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\lambda\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^{i}\\ &= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\mathrm{e}^{\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)}\\ &= \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k\end{aligned}$$

donc $Y \sim \mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{N}\right)$.

4.2. Extension aux n-uplets de variables aléatoires

Définition 4.2.1 (Vecteur aléatoire)**.**
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On appelle ***vecteur aléatoire discret***, ou ***n-uplet de variables aléatoires discrètes*** défini à partir des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ la variable aléatoire discrète Z donnée par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))\,.$$

La loi de la variable Z est appelée loi conjointe des variables $X_1, \ldots, X_n$ tandis que les lois de $X_1, \ldots, X_n$ sont les lois marginales de Z.

Remarque 4.2.2.
La loi conjointe détermine les lois marginales, mais l'inverse n'est pas vrai.

5. Variables aléatoires indépendantes

5.1. Définition

Définition 5.1.1 (Variables aléatoires indépendantes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Elles sont dites ***indépendantes*** si

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Dans ce cas, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemple 5.1.2.
On lance un dé à 6 faces, dont on note X le résultat. Et on lance ensuite un dé à 8 faces, dont on note Y le résultat. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 5.1.3.
Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $X \perp\!\!\!\perp Y$;

(ii) pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)\ ;$$

(iii) pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) > 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est égale à la loi de Y (*i.e.* $P_{Y|(X=x)} = P_Y$) ;

(iv) pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ est égale à la loi de X (*i.e.* $P_{X|(Y=y)} = P_X$).

Démonstration.
Le seul point un peu délicat est l'implication (i)$\Rightarrow$(ii). Détaillons-la.
Supposons que $X \perp\!\!\!\perp Y$. Soit $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. Notons $A = \{x_i\}_{i \in I}$ et $B = \{y_j\}_{j \in J}$, où I et J sont bien sûr au plus dénombrables.
Alors $(X \in A, Y \in B) = \displaystyle\bigsqcup_{(i,j) \in I \times J} (X = x_i, Y = y_j)$. La réunion étant disjointe,

$$\begin{aligned}
P((X,Y) \in A \times B) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} P\left(X = x_i, Y = y_j\right) \\
&= \sum_{(i,j) \in I \times J} P\left(X = x_i\right) P\left(Y = y_j\right) \\
&= \left(\sum_{i \in I} P\left(X = x_i\right)\right) \left(\sum_{j \in J} P\left(Y = y_j\right)\right) \\
&= P(X \in A)P(Y \in B)
\end{aligned}$$

toutes les sommes écrites étant des sommes de familles sommables, ce qui permet les sommations par paquets et les interversions à volonté. $\square$

5.2. Évènements indépendants et variables aléatoires indépendantes

Définition 5.2.1 (Fonction indicatrice)**.**
Si $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé et si $A \in \mathscr{A}$, l'application $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \{0,1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Sa loi est une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

Proposition 5.2.2.
Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ le sont.

Démonstration.
$(\Rightarrow)$: nous allons utiliser la relation très classique $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. De plus, $A = (\mathbb{1}_A = 1)$ et $\bar{A} = (\mathbb{1}_A = 0)$, et de même $A = (\mathbb{1}_B = 1)$ et $\bar{B} = (\mathbb{1}_B = 0)$.
Il s'agit alors de montrer que pour tout $a, b \in \{0,1\}$, $P(\mathbb{1}_A = a, \mathbb{1}_B = b) = P(\mathbb{1}_A = a)P(\mathbb{1}_B = b)$. Il y a donc quatre cas à étudier. Traitons par exemple le cas $a = 1$ et $b = 0$, les autres étant du même acabit.

$$\begin{aligned} P(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 0) &= P(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_{\bar{B}} = 1) = P(\mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} = 1) \\ &= P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) \\ &= P(\mathbb{1}_A = 1)P(\mathbb{1}_B = 0). \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: si $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\mathbb{1}_{A\cap B} = 1) = P(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = 1) \\ &= P(\mathbb{1}_A = 1, \mathbb{1}_B = 1) = P(\mathbb{1}_A = 1)P(\mathbb{1}_B = 1) \\ &= P(A)P(B). \end{aligned}$$

□

5.3. Extension au cas de n variables aléatoires

Définition 5.3.1 (Indépendance de n variables aléatoires)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et soit $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires discrètes sur Ω. On dit que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont ***mutuellement indépendantes*** (ou tout simplement ***indépendantes***) si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ on a

$$P\left((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\right) = P\left(X_1 = x_1\right) \times \cdots \times P\left(X_n = x_n\right).$$

Comme dans le cas de deux variables aléatoires, on démontre le résultat suivant :

Proposition 5.3.2.
Soient $X_1, \dots, X_n n$ variables aléatoires discrètes sur Ω.
Elles sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tous sous-ensembles $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$ on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in A_i\right).$$

Remarque 5.3.3.

1. Comme dans le cas des univers finis, l'indepance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fause.
2. On remarquera aussi que pour définir l'indépendance de n évènements, il faut en passer par toutes les parties de $[\![1, n]\!]$, mais pour l'indépendance de n variables aléatoires, seul ce qui se passe sur $[\![1, n]\!]$ importe. La propriété qui suit l'assure.

Proposition 5.3.4.
Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires, et $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $\operatorname{Card} I \geqslant 2$. Alors $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.

Démonstration.
Soit $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$, tels que si $i \notin I$, $A_i = X_i(\Omega)$. Alors si $i \notin I$, $(X_i \in A_i) = \Omega$ et $P(X_i \in A_i) = 1$. Donc

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i\in I}(X_i \in A_i)\right) &= P\left(\Omega \cap \left(\bigcap_{i\in I}(X_i \in A_i)\right)\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in A_i\right) = 1 \times \prod_{i\in I} P\left(X_i \in A_i\right) \\ &= \prod_{i\in I} P\left(X_i \in A_i\right) \end{aligned}$$

d'où l'indépendance. □

5.4. Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Proposition 5.4.1.
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω, E un ensemble et $f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \to E$.
Alors la fonction $\Omega \to E$, $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est une variable aléatoire notée $f(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition 5.4.2 (Lemme des coalitions)**.**
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω, mutuellement indépendantes.

1. Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$. Alors lesvariables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.
2. Soit I_1, I_2 une partition de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire que $[\![1, n]\!] = I_1 \bigsqcup I_2$. Soit E_1 le produit cartésien des X_i pour $i \in I_1$, et E_2 celui des X_j pour $j \in I_2$, et soit f une fonction définie sur E_1, et g une fonction définie sur E_2.
   Alors les variables aléatoires $f((X_i)_{i\in I_1})$ et $g((X_j)_{j\in I_2})$ sont indépendantes.

Exemple 5.4.3.
Si $X_1, \dots, X_5$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes, $(X_1 + X_2 + X_4)$ et $\sqrt{X_3^2 + \mathrm{e}^{X_5}}$ sont indépendantes.

Démonstration.
L'ordre des variables aléatoires n'ayant pas d'importance pour l'indépendance, il suffit de traiter le cas où $m \in [\![1, n-1]\!]$, et $I_1 = [\![1, m]\!]$, $I_2 = [\![m+1, n]\!]$. Posons $X = f(X_1, \dots, X_m)$ et $Y = g(X_{m+1}, \dots, X_n$.
Soit $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

$$P(X = x, Y = y) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in f^{-1}(\{x\}),\left(x_{m+1},\dots,x_n\right)\in g^{-1}(\{y\})} P\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right).$$

Par indépendance

$$P\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right) = P\left(X_1 = x_1\right)\dots P\left(X_n = x_n\right)$$

puis

$$P\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right) = P\left(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m\right) P\left(X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_n = x_n\right).$$

En réorganisant la somme par paquets

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) = &\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in f^{-1}(\{x\})} P\left(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m\right) \\ &\times \sum_{\left(x_{m+1},\dots,x_n\right)\in g^{-1}(\{y\})} P\left(X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_n = x_n\right) \end{aligned}$$

et finalement

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

□

On peut généraliser ce résultat à plus de deux coalitions :

Proposition 5.4.4.
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω, mutuellement indépendantes.
Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de $[\![1, n]\!]$. Notons pour tout $j \in J$, $Y_j = (X_k)_{k\in I_j}$, et f_j une fonction définie sur $Y_j(\Omega)$. Alors les variables aléatoires $(f_j(Y_j))_{j\in J}$ sont mutuellement indépendantes.

5.5. Familles infinies de variables aléatoires indépendantes

Définition 5.5.1.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille infinie de variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dit que les variables aléatoires de la famille $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes si toutes ses sous-familles finies sont mutuellement indépendantes.

Exemple 5.5.2.
On lance indéfiniment une pièce de monnaie et l'on note X_n la variable de Bernoulli égale à 1 lorsqu'on obtient face au n-ième lancer. Il est usuel de modéliser l'expérience en supposant la famille $(X_n)_{n\geqslant 1}$ constituée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Remarque 5.5.3.
Le lemme des coalitions s'adapte dans le cas d'une famille infinie de variables aléatoires.

6. Exercices classiques

6.1. Premier tirage d'une boule

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

6.2. Loi d'un couple et lois marginales

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

6.3. Max et min de deux lois géométriques

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

6.4. Couples de variables aléatoires de Poisson

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.