VII Théorie des ensembles

30 août 2023

La première partie de ce chapitre est donnée dans un but culturel et ne sera pas traitée en cours. Les axiomes qui y sont exposés ne sont pas à connaître.

1 Un peu d'histoire.

La théorie des ensembles doit son succès au fait qu'elle fournit des fondements solides pour toutes les mathématiques actuelles. En théorie des ensembles, tous les objets mathématiques sont des ensembles : les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles, ...

Nous n'allons pas entrer dans les détails de la théorie. Nous allons tout d'abord nous contenter de la définition suivante pour les ensembles :

Définition 1.0.1 (Pseudo-définition).
Un *ensemble* est une collection d'objets appelés *éléments*. On note $x \in E$ si l'objet x est un élément de l'ensemble E, $x \notin E$ sinon.

Même si cela ressemble à une définition, il y a un problème de taille : cette pseudo-définition repose sur la notion de *collection*, qui n'est pas définie !

En fait, on s'aperçoit qu'on ne parvient pas à définir ce qu'*est* un ensemble mais qu'on peut essayer de le définir par les propriétés qu'on attend de lui.

Pour l'instant, on peut simplement dire qu'on manipule des objets mathématiques, qu'on appelle ensembles, et qu'on dispose d'un prédicat à deux arguments, le prédicat d'appartenance, noté $\in$.

1.1 La crise des fondements.

Historiquement, la notion d'ensemble a été introduite au XIXe siècle par Cantor puis formalisés notamment par Frege, qui introduit les ensembles à partir de la notion de prédicat. Essentiellement, il se donne un axiome [1] appelé *schéma de compréhension (non restreinte)* disant qu'étant donné un prédicat P quelconque à un argument, on peut définir un ensemble E, appelé ensemble des x tels que $P(x)$, noté $\{ x \mid P(x) \}$, tel que les éléments de E sont exactement les objets mathématiques x tels que $P(x)$. Pour tout objet mathématique x, on a donc :

$$x \in E \iff P(x)$$

Malheureusement on s'est aperçu bientôt que cet axiome conduisait à un paradoxe, appelé paradoxe de Russel ou paradoxe du barbier :

Exercice 1.1.1 (Paradoxe du barbier).
Dans une ville de Crète, le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier se rase t-il lui-même ?

Ce paradoxe est à rapprocher du paradoxe d'Épiménide le Crétois [2] :

> «Tous les crétois sont toujours menteurs.»
>
> Épiménide le Crétois
> (VII$^{\text{e}}$ siècle av. J.-C.)

Exercice 1.1.2 (Paradoxe de Russel).
On dira qu'un ensemble x est anormal et on notera $A(x)$ si $x \in x$. On dira qu'un ensemble x est normal dans le cas contraire ($x \notin x$) et on notera $N(x)$. Notons E l'ensemble des ensembles normaux. E est-il normal ?

Ce paradoxe, trouvé indépendamment par Zermelo en 1900 et par Russel en 1901 a conduit à une crise profonde de la théorie des ensembles.

Pour résoudre ce paradoxe, il y a essentiellement deux façons de voir les choses :

1. La théorie des ensembles permet de mettre dans un même ensembles des objets de niveau différents. Par exemple on peut considérer l'ensemble $\{ 1, \sin, \mathbb{R} \}$ qui contient à la fois un nombre, une fonction et un ensemble de nombres, ce qui semble assez incongru et qui fait qu'on peut en arriver à se poser la question de l'appartenance d'un ensemble à

1. Techniquement, il s'agit en fait de ce qu'on appelle un schéma d'axiomes

2. Attention : En 270 avant J.-C., Philétas de Cos serait mort d'insomnie voire se serait suicidé à cause de ce parallogisme.

lui-même, ce qui conduit au paradoxe. Pour éviter ce problème, on peut essayer de classer les ensembles par niveau : on peut se dire qu'il y a des objets de niveau 0 avec lesquels on peut former les ensembles de niveau 1, avec lesquels on peut former les ensembles de niveau 2, etc. et s'interdire d'écrire une proposition de la forme $x \in y$ si x n'est pas de niveau inférieur à y. Du coup, se poser la question $x \in x$ n'est pas possible et on ne peut pas tomber dans le paradoxe. Cette solution, esquissée en 1903 puis véritablement développée en 1908 par Russel, a donné ce qu'on appelle la théorie des types. C'est une solution lourde qui avait quasiment disparu jusqu'à ce qu'on lui trouve des applications très intéressantes en informatique.

2. On peut préciser les règles de formation des ensembles pour qu'on ne puisse pas construire un ensemble avec n'importe quel prédicat : on restreint le schéma de compréhension mentionné plus haut. De cette façon, on peut se poser la question $x \in x$ pour chaque ensemble x mais on ne peut pas construire l'ensemble $\{ x \in x \}$. C'est la solution choisie par Zermelo (en 1908), complétée par la suite par Fraenkel, Skolem et Zermelo (dans les années 1920) et clarifiée par Von Neumann par la suite. Connue sous le nom ZFC (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix), c'est la théorie qui a été adoptée quasi universellement par les mathématiciens.

1.2 Théorie des ensembles ZFC.

ZFC repose sur les dix axiomes [3] suivants :

3. En fait la compréhension et le remplacement sont techniquement des schémas d'axiomes, le schéma de compréhension pourrait être supprimé car il découle de celui de remplacement, l'axiome de l'ensemble de vide pourrait aussi être supprimé, et le 9e est optionnel, car il est sans impact sur l'essentiel des mathématiques.

Axiome 1.2.1 (Extensionnalité)**.**
Si deux ensembles ont les mêmes éléments alors ils sont égaux.

Axiome 1.2.2 (de l'ensemble vide)**.**
Il existe un ensemble sans élément.

Axiome 1.2.3 (de la paire)**.**
Si x et y sont deux objets, il existe un ensemble contenant x et y et eux seuls comme éléments. Il se note $\{ x, y \}$.

Axiome 1.2.4 (de la réunion)**.**
Étant donné un ensemble (d'ensembles) E, il existe un ensemble R dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de E, c'est-à-dire vérifiant, pour tout x :

$$x \in R \iff \exists X \in E \; x \in X$$

Axiome 1.2.5 (de l'ensemble des parties)**.**
Étant donné un ensemble E, il existe un ensemble, noté $\mathscr{P}(E)$ dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de E.

Axiome 1.2.6 (de l'infini)**.**
Il existe un ensemble infini.

Remarque 1.2.1.
Cet axiome est essentiel pour construire l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Il resterait à dire ce que veut dire « infini ». Parfois, cet axiome est exprimé sous la forme plus forte suivante qui permet d'évacuer cette question : il existe un ensemble W, tel qu'on ait à la fois

(i) l'ensemble vide appartient à W ;

(ii) $\forall x \in W \quad x \cup \{ x \} \in W$.

Axiome 1.2.7 (Schéma de compréhension)**.**
Pour tout ensemble E et tout prédicat P, il existe un ensemble, noté $\{ x \in E \mid P(x) \}$ dont les éléments sont exactement les éléments de E vérifiant P :

$$x \in \{ x \in E \mid P(x) \} \iff (x \in E \text{ et } P(x))$$

Axiome 1.2.8 (Schéma de remplacement)**.**
Étant donné un ensemble E et un prédicat P à deux arguments ayant la propriété d'être fonctionnel, c'est-à-dire que pour tout x, il existe un et un seul y tel que $P(x, y)$ est vérifié, il existe un ensemble X, noté $\{ y \mid \exists x \in E \ P(x, y) \}$ dont les éléments sont exactement les y tels qu'il existe $x \in E$ vérifiant $P(x, y)$. Autrement dit, pour tout y, on a

$$y \in X \iff \exists x \in E \ P(x, y)$$

En notant, pour tout $x \in E$, $f(x)$ l'unique y tel que $P(x, y)$, on note aussi cet ensemble $\{ f(x) \mid x \in E \}$.

Axiome 1.2.9 (de fondation)**.**
Tout ensemble X non vide contient un élément x tel que X et x sont disjoints.

Axiome 1.2.10 (du choix)**.**
Pour tout ensemble E, en notant $\mathscr{P}(E)^*$ l'ensemble des parties de E non vides [4], il existe une application $\sigma : \mathscr{P}(E)^* \to E$, appelée application de choix, associant à toute partie non vide de E l'un de ses éléments, c'est-à-dire telle que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $\sigma(X) \in X$.

Remarque 1.2.2.
Cet axiome paraît très naturel. Pour saisir la difficulté, essayez par exemple de construire une application σ de ce type dans le cas où $E = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}$.

2 Définitions.

Nous développons ici la notion d'ensemble, en partant d'une définition intuitive et peu formelle : un ensemble est une collection d'objets mathématiques. Si un objet x est dans cette collection-ensemble E, on note alors $x \in E$ la phrase « x appartient à E ». Sa négation, « x n'appartient pas à E », s'écrit $x \notin E$.

Remarque 2.0.1.
Traditionnellement, on essaie de noter les ensembles avec des lettres majuscules et leurs éléments avec des lettres minuscules.

2.1 Appartenance, égalité.

Proposition 2.1.1 (Extentionnalité)**.**
Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments :

$$E = F \iff \forall x \ (x \in E \iff x \in F).$$

Remarque 2.1.2.
Intuitivement, cette proposition dit que la caractéristique qui définit un ensemble, ce sont ses éléments. Autrement dit, si on voit les ensembles comme des sacs contenant des objets, le sac n'a aucune caractéristique qui puisse le distinguer d'un autre. Cette caractéristique est très particulière au monde idéalisé des ensembles mathématiques. En informatique on verra par exemple qu'on peut avoir deux tableaux contenant les mêmes éléments dans le même ordre et qui ne sont pas le même objet.

Démonstration.
Le sens direct est une conséquence de ce qu'est l'égalité. E étant égal à F toute proposition est équivalente à cette même proposition dans laquelle E est remplacée par F, en particulier, pour tout x, $x \in E$ est équivalent à $x \in F$.

Le sens indirect est une conséquence de l'axiome d'extentionnalité. □

4. Cet ensemble existe bien d'après l'axiome de l'ensemble des parties et du schéma de compréhension

Remarque 2.1.3.
Au niveau de ce cours, on peut considérer la proposition précédente comme une définition.

Définition 2.1.4 (Ensemble vide)**.**
On note $\varnothing$ l'ensemble vide.

Remarque 2.1.5.
Cet ensemble existe d'après l'axiome de l'ensemble vide. Et d'après l'axiome d'extentionnalité, il est unique.

Démonstration.
Soit $\varnothing$ et $\varnothing'$ deux ensembles sans éléments, soit x un objet. Alors, $x \in \varnothing$ et $x \in \varnothing'$ sont toutes deux fausses, donc équivalentes, donc $\varnothing = \varnothing'$. □

Définition 2.1.6.
Étant donnés des objets x_1, x_2, …, x_n, on note $\{ x_1, \dots, x_n \}$ l'ensemble contenant exactement x_1, …, x_n.

Pour tout ensemble E et tout prédicat P, on note $\{ x \in E \mid P(x) \}$ l'ensemble dont les éléments sont exactement les éléments de E vérifiant P.

Pour tout ensemble E et toute expression $e[x]$ contenant une variable x, on note $\{ e[x] \mid x \in E \}$ l'ensemble des objets mathématiques qui s'écrivent sous la forme $e[x]$ pour au moins un $x \in E$.

Remarque 2.1.7.
1. Pour le premier point, l'ordre des éléments n'importe pas, ni le nombre de fois où ils apparaissent dans la liste des éléments. $\{ 1, 2 \} = \{ 2, 1 \} = \{ 1, 2, 1 \}$. L'existence d'un tel ensemble peut être justifié à partir de l'axiome de la paire et de la réunion. On parle de définition de l'ensemble en extension.
2. Pour le second point, l'existence de l'ensemble est justifiée par le schéma de compréhension. On parle de donc de définition en compréhension.
3. Pour le troisième point, l'existence de l'ensemble est assurée par l'axiome de compréhension si l'on sait que pour tout $x \in E$, $e[x]$ appartient nécessairement à un ensemble fixé F indépendant de x. C'est par exemple le cas de $\{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Sinon, le schéma de remplacement assure son existence (on prend comme prédicat $P(x, y)$ la proposition $y = e[x]$). C'est par exemple le cas de $\{ \mathscr{P}(x) \mid x \in E \}$ où E est un ensemble.

Exemple 2.1.8.
Un même ensemble peut parfois être défini en extension ou en compréhension :

$$\begin{aligned} E &= \{0; 1; 4; 9\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \leqslant 15 \text{ et } \exists p \in \mathbb{N},\ n = p^2 \right\}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, E et F désignent deux ensembles.

2.2 Inclusion, ensemble des parties.

Définition 2.2.1 (Inclusion)**.**
On dit que E est *inclus* dans F, ce que l'on note $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F, *i.e.*

$$\forall x \in E \ x \in F.$$

Si $E \subset F$, on dit que E est une *partie* ou un *sous-ensemble* de F.

Exemple 2.2.2.
1. Pour tout ensemble E, on a $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$.
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
3. $\{1, \{1; 2\}, \mathbb{R}\} \subset \{\mathbb{Z}, \pi, 1, \{1; 2\}, \mathbb{R}\}$.
4. $\{\{1; 2\}\} \not\subset \{1; 2\}$.

Remarque 2.2.3.
Attention à ne pas confondre. $\in$ et $\subset$. Ainsi $1 \in \{1, 2\}, \{1\} \subset \{1, 2\}$, mais $\{1\} \notin \{1, 2\}$. En revanche on a $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ ainsi que $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

En pratique pour démontrer une inclusion, on utilise la définition et la manière usuelle de démontrer une proposition universellement quantifiée.

Exemple 2.2.4.
On note E l'ensemble des entiers relatifs pairs

qui sont des multiples de 15 et F l'ensemble des entiers relatifs multiples de 6. Montrer $E \subset F$.

Proposition 2.2.5 (Transitivité)**.**
Soit E, F, G trois ensembles, si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Démonstration.
Soit x un objet. Si $x \in E$, comme $E \subset F$, on a $x \in F$. De même, comme $F \subset G$, on a $x \in G$. □

Théorème 2.2.6 (Double inclusion)**.**
Soit E, F deux ensembles, alors

$$(E = F) \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Démonstration.
Il est clair que pour tout ensemble A, on a $\forall x \in A \quad x \in A$, donc $A \subset A$. Le sens direct est donc évident.

Montrons l'implication réciproque. Supposons $E \subset F$ et $F \subset E$. Alors soit x un objet mathématique quelconque. Montrons $x \in E \iff x \in F$:

— Supposons $x \in E$, alors comme $E \subset F$, on a $x \in F$.
— Supposons $x \in F$, alors comme $F \subset E$, on a $x \in E$.

donc $x \in E \iff x \in F$.

Donc $\forall x \quad x \in E \iff x \in F$.

Donc (par extentionnalité) $E = F$. □

Remarque 2.2.7.
En pratique, on a deux méthodes pour démontrer l'égalité de deux ensembles E et F :

— ou bien on utilise ce théorème ;
— ou bien on utilise directement la propriété d'extentionnalité, en montrant que pour tout x, $x \in E \iff x \in F$ par équivalences successives.

Axiome 2.2.1 (Ensemble des parties de E)**.**
Pour tout ensemble E, on admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathscr{P}(E)$ et appelé *ensemble des parties de E* et dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de E. Ainsi pour tout ensemble F, on a

$$F \in \mathscr{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

Exercice 2.2.8.
Déterminer $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$. Combien cet ensemble admet-il d'éléments ?

Remarque 2.2.9.
Ne pas oublier $\varnothing$ dans l'ensemble des parties.

Exercice 2.2.10.
Déterminer $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{\varnothing\})$ et $\mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$.

Proposition 2.2.11.
Si un ensemble E possède $n \in \mathbb{N}$ éléments, alors $\mathscr{P}(E)$ possède 2^n éléments.

Démonstration.
Cela sera démontré au second semestre, dans le cours de dénombrement. □

2.3 Réunion, intersection, complémentaire.

Dans cette partie A et B désignent deux ensembles.

Définition 2.3.1.
1. On appelle *réunion de A et B* notée $A \cup B$, l'ensemble dont les éléments sont exactement ceux qui sont dans A ou dans B, autrement dit, pour tout objet x,

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

2. On appelle *intersection de A et B* notée $A \cap B$ dont les éléments sont exactement ceux qui sont dans A et dans B à la fois, autrement dit, pour tout objet x,

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Démonstration.
1. L'existence de $A \cup B$ est assurée par l'axiome de la réunion appliqué à la paire $\{ A, B \}$.
2. L'existence de $A \cap B$ est assurée par le schéma de compréhension. Il s'agit en effet simplement de $\{ x \in A \mid x \in B \}$.

□

Exemple 2.3.2.
On pose $E = \{ 0, 1, 2, 4 \}$ et $F = \{ 0, 1, 3, 4, 5, 6 \}$. Que vaut $E \cup F$? $E \cap F$?

Proposition 2.3.3.
Soit A, B, C trois ensembles.

1. $\cap$ et $\cup$ sont associatives : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*idem* pour $\cup$).
2. $\cap$ et $\cup$ sont commutatives : $A \cap B = B \cap A$ (*idem* pour $\cup$).
3. On a toujours $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
4. Si $A \subset B$, on a toujours $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$.

Démonstration.
Élémentaire, revenir aux définitions. $\square$

Remarque 2.3.4.
La dernière propriété signifie que $A \mapsto A \cap C$ et $A \mapsto A \cup C$ sont croissantes (au sens de l'inclusion).

Définition 2.3.5.
On dit que deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est vide.

Définition 2.3.6.
On peut généraliser cette notion à une famille d'ensembles.

1. Si E est un ensemble d'ensembles, on note $\bigcup_{X \in E} X$ la réunion de tous les éléments de E et, dans le cas où E est non vide, $\bigcap_{X \in E} X$ l'intersection de tous les éléments de E. Pour tout x, on a les propriétés :
$$x \in \bigcup_{X \in E} X \iff \exists X \in E,\ x \in X;$$
$$x \in \bigcap_{X \in E} X \iff \forall X \in E,\ x \in X.$$
2. Plus généralement, si on considère une famille d'ensemble $(A_i)_{i \in I}$, on note $\bigcup_{i \in I} A_i$ la réunion de tous les A_i pour $i \in I$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ l'intersection de tous les A_i. Pour tout x, on a les propriétés :
$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I,\ x \in A_i\ ;$$
$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Exercice 2.3.7.
1. Que valent $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1]$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [n, n+1]$?
2. Quel est l'ensemble de définition de tan ?
3. Que vaut chacun des ensembles ci-dessous ?

$$\bigcup_{\varepsilon \in]0,1]} [\varepsilon, 1] \qquad \bigcup_{\varepsilon \in]0,1]}]\varepsilon, 1] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]} [0, \varepsilon] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]} [0, \varepsilon[$$
$$\bigcap_{\varepsilon \in]0,1]}]0, \varepsilon] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1]}]0, \varepsilon[\qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} [0, \varepsilon] \qquad \bigcap_{\varepsilon \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} [0, \varepsilon[$$

Proposition 2.3.8.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble.

1. Si, pour tout $i \in I$, $A_i \subset B$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \subset B$.
2. Si, pour tout $i \in I$, $B \subset A_i$, alors $B \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.
3. Si $j \in I$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Démonstration.
Élémentaire. $\square$

Théorème 2.3.9 (Distributivité)**.**
La réunion et l'intersection sont distributives l'une sur l'autre. Plus précisément, soit A, B et C trois ensembles. Alors on a les deux égalités suivantes :
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Plus généralement, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles et B un ensemble, alors

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B); \tag{1}$$
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B). \tag{2}$$

Démonstration.
Faire un dessin pour les deux premières égalités.

Les résultats se montrent aisément par double inclusion. On donne la démonstration de l'égalité (2).

Pour tout x :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\Leftrightarrow x \in B \text{ et } \exists i_0 \in I,\ x \in A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow \exists i_0 \in I,\ x \in A_{i_0} \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B). \end{aligned}$$

□

Exercice 2.3.10.
Montrer les propriétés (2) et (1) en raisonnant par double inclusion et en prenant soin de bien revenir aux définitions des objets manipulés.

Définition 2.3.11.
On appelle A *privé de* B, ou *différence de* A *et* B, ou A *moins* B, l'ensemble noté $A\setminus B$ ou $A-B$, tel que pour tout objet x, $x \in A \setminus B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \notin B$.

Cet ensemble est bien défini d'après le schéma de compréhension.

Exercice 2.3.12.
Montrer que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Définition 2.3.13.
Si $A \subset E$, on appelle *complémentaire de* A *dans* E noté $\complement_E A$ ou A^C ou $\overline{A}$ quand il n'y a pas de confusion, l'ensemble $E \setminus A$.

Proposition 2.3.14.
Si A et B sont deux parties de E, on a $A \setminus B = A \cap B^C$.

Démonstration.
Faire un dessin.

Soit x quelconque. On a $A \subset E$ donc $x \in A \iff (x \in A \text{ et } x \in E)$. On a donc :

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in E \text{ et } (x \notin B)) \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in E \setminus B \\ &\iff x \in A \cap B^C. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.15.
Soit E un ensemble et A une partie de E, alors $\overline{\overline{A}} = A$.

Démonstration.
C'est une conséquence de la propriété de double négation : soit x un élément de E, on a $x \in A \Leftrightarrow \neg(\neg(x \in A))$. □

Proposition 2.3.16.
Soit E un ensemble et A une partie de E, alors $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \varnothing$.

Démonstration.
Soit $x \in E$, on a $x \in A$ ou $x \notin A$ (tiers exclu), donc $x \in A \cup \bar{A}$.

De plus, on ne peut avoir simultanément $x \in A$ et $x \notin A$, donc $A \cap \bar{A} = \varnothing$. □

Théorème 2.3.17 (Relations de De Morgan)**.**
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Alors on a

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcup_{i\in I} \left(A_i^C\right);$$
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C = \bigcap_{i\in I} \left(A_i^C\right).$$

Démonstration.
On montre le deuxième point. Les deux termes de l'égalité sont évidemment des sous-ensembles de E. Considérons donc un $x \in E$ quelconque et montrons que x appartient au premier ensemble si et seulement s'il appartient au deuxième. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C &\iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff \neg(\exists i \in I\ x \in A_i) \\ &\iff \forall i \in I\ x \notin A_i \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} \left(A_i^C\right). \end{aligned}$$

Le premier se déduit de la seconde en passant au complémentaire pour la famille $(A_i^C)_{i\in I}$. □

Définition 2.3.18.
Soit E un ensemble, soit $\mathscr{F} = (F_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

Alors, $\mathscr{F}$ est un *recouvrement disjoint* de E si

— les éléments de $\mathscr{F}$ sont deux à deux disjoints :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \varnothing\ ;$$

— E est l'union des éléments de $\mathscr{F}$:

$$E = \bigcup_{i\in I} F_i.$$

On dit de plus que $\mathscr{F}$ est une *partition* de E si c'est un recouvrement disjoint de E sans aucune partie vide :

$$\forall i \in I, \quad F_i \neq \varnothing.$$

Remarque 2.3.19.
On pourrait bien entendu parler de recouvrement, mais nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser ce vocabulaire cette année.

Nous utiliserons davantage les partitions que les recouvrements disjoints.

Exemple 2.3.20.

On considère

$$\begin{aligned} F_0 &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0\ [3] \,\} \\ &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ n = 3p \,\} \\ F_1 &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 1\ [3] \,\} \\ &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ n = 3p+1 \,\} \\ F_2 &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 2\ [3] \,\} \\ &= \{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ n = 3p+2 \,\} \end{aligned}$$

Alors, $\{F_0, F_1, F_2\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$ (en trois parties).

2.4 Produit cartésien.

Définition 2.4.1.
On admettra qu'étant donné deux objets x et y on peut construire un objet appelé *couple* (x, y) et qu'on a la propriété suivante pour tous objets x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \iff (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2).$$

Remarque 2.4.2. — La construction des couples ne demande en fait aucun axiome supplémentaire, celle-ci pouvant être construite à partir des paires.

— On peut généraliser cette notion à celle de n-uplets.

Définition 2.4.3.
Soient E et F deux ensembles. On admet qu'on peut construire un ensemble noté $E \times F$, appelé *produit cartésien de E et F*, dont les éléments sont les couples avec $x_1 \in E$ et $x_2 \in F$. On définit de même le produit cartésien de n ensembles $E_1 \dots E_n$, noté $E_1 \times \dots \times E_n$, et formé des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ avec $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. Si les E_i sont égaux à un ensemble E, on note ce produit E^n.

Remarque 2.4.4.
Attention à ne pas confondre l'ensemble $\{x, y\}$ avec le couple (x, y).

Exemple 2.4.5.
L'ensemble $\mathbb{R}^2$, le rectangle $[1,3]\times[-1,4]$, la partie $[1,3[\times]-1,4]$ (voir figure 1), la bande $[0,1]\times\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\,\}$ (le représenter).

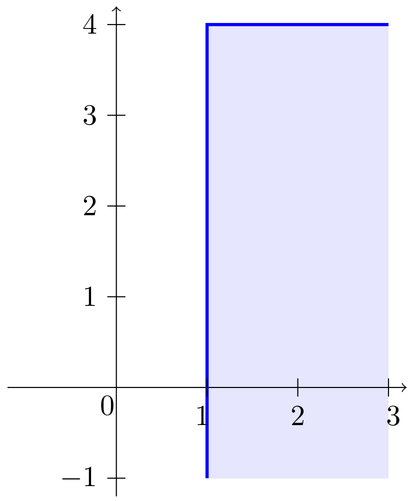

FIGURE 1 – Représentation de $[1,3[\times]-1,4]$.

3 Interprétation logique

Soit E un ensemble, P et Q deux prédicats. On pose

$$\begin{aligned} A &= \{\, x\in E \mid P(x)\,\}\,;\\ B &= \{\, x\in E \mid Q(x)\,\}\,. \end{aligned}$$

Soit $x\in E$. On a alors les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned} x\in A\cap B &\iff P(x) \text{ et } Q(x);\\ x\in A\cup B &\iff P(x) \text{ ou } Q(x);\\ x\notin A &\iff \neg(P(x));\\ A=E &\iff \forall x\in E,\ P(x);\\ A\neq\varnothing &\iff \exists x\in E,\ P(x);\\ A\subset B &\iff \forall x\in E,\ (P(x)\Rightarrow Q(x));\\ A=B &\iff \forall x\in E,\ (P(x) \iff Q(x)). \end{aligned}$$