Planche 2 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme ne possédant aucune racine de module 1.

1) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t$. On la note $M(P)$.

2) Justifier qu'il existe un entier S, une famille de complexes $(z_1, \dots, z_S)$, une famille d'entiers $(m_1, \dots, m_S)$ et une constante A tels que :

$$M(P) = A + \sum_{k=0}^{S} m_k M(X - z_k)$$

3) Écrire une fonction `Malher(r, theta)` qui renvoie la valeur de $M(X - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. Que renvoie `Malher(2,50)` ? Tracer les courbes en fonction de θ pour les valeurs de $r \in R = \{2.5, 5, 100, 2017\}$. Quelle conjecture peut-on faire ?

4) Tracer les courbes en fonction de r pour θ fixé prenant les valeurs 1, 10, 50 et 90. Quelle conjecture peut-on faire ?

5) Démontrer les précédentes conjectures.

Planche 3 :

On définit $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, pour tout n.

1) Définir une fonction qui stocke les 20 premières valeurs de F et les affiche.

2) On note $\alpha_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$ et $\beta_n = \dfrac{F_n}{F_{n+3}}$, et :

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(\alpha_n^{2k+1} + \beta_n^{2k+1})}{2k+1}$$

Pour $0 \leqslant n \leqslant 9$ et $0 \leqslant p \leqslant 9$, calculer et afficher les valeurs de $4S(n,p)$. Formuler une conjecture.

3) Calculer $(F_{n+2} + \mathrm{i}F_{n+1})(F_{n+3} + \mathrm{i}F_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 8$. Que remarque-t-on ? À l'aide de cette remarque et en utilisant les arguments des nombres complexes, démontrer la conjecture de la deuxième question.

4) On note R_p le reste d'ordre p de $\sum (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Montrer que $R_p = (-1)^{p+1} \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2p+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

5) Déterminer un équivalent de $4S(n,p) - \pi$ lorsque $p \to +\infty$.

Planche 4 :

C_1	C_2	C_3	C_4

On étudie la position au cours du temps d'un pion sur un jeu de 4 cases dont la règle est la suivante : Au temps $n = 0$, le pion est en C_1, et pour un temps n quelconque,

— si le pion est en C_i avec $i \neq 1$, il passe en C_{i-1} au temps $n+1$;

— si le pion est en C_1, il passe en C_1, C_2, C_3 ou C_4 de façon équiprobable.

1) Écrire une fonction prenant en paramètre n et renvoyant toutes les positions du pion jusqu'au temps n.

2) Tracer les positions successives en fonctions du temps pour $n = 10$, $n = 50$, $n = 100$. Formuler une conjecture.

3) On note X_n la v.a. donnant le numéro de la case où se trouve le pion à l'instant n. On pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

a) Déterminer A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Que peut-on en déduire pour la convergence de $(U_n)_n$?
(En cas de convergence, donner la limite.)

4) Pour $i \in [\![1,4]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n(i)$ la v.a. du nombre de fois où le pion est allé sur la case i au cours des $(n+1)$ premières étapes.

a) Écrire une fonction prenant en paramètre n, et qui renvoie $(Y_n(1), \dots, Y_n(4))$.

b) La tester 100 fois pour $n = 100$.

c) Qu'en conclure pour $E(Y_{100}(i))$?