Planche 1 :

1) Écrire une fonction renvoyant une liste `L` de $(n+1)$ nombres tirés aléatoirement entre 1 et n. Montrer qu'il y a ainsi forcément deux nombres identiques dans `L`.

2) On appelle *indice de répétition* le plus petit entier k tel qu'il existe $i < k$ où $L[i] = L[k]$. Écrire une fonction d'argument une liste et renvoyant cet indice.

3) Écrire une fonction d'arguments m et n, renvoyant la moyenne sur m épreuves du rang de l'indice de répétition de listes de longueurs n.
Pour $m = 100$ et n entre 10 et 300, tracer la courbe de cette fonction, ainsi que $n \mapsto \sqrt{n}$. Formuler alors une conjecture.

On appelle X_n les v.a. correspondant à l'indice de répétition pour une liste identique à celle de la première question.

4) Montrer que :

$$P(X_n > j) = \prod_{i=0}^{j} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

5) **a)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. En déduire que $P(X_n > j) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{j^2}{2n}}$.

b) Montrer que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X_n > i)$ et en déduire que $E(X_n) \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{i^2}{2n}}$.

c) On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{n\frac{\pi}{2}}$. Montrer que $E(X_n) \leqslant 1 + \sqrt{n\frac{\pi}{2}}$.
Comparer les valeurs de la troisième question avec les $\sqrt{n\frac{\pi}{2}}$.

Planche 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & -21 & -20 \\ -9 & 3 & 20 \\ -9 & -9 & -18 \end{pmatrix}$

1) A est-elle inversible ?

2) Grâce à $\chi_A(X)$, déterminer un polynôme P tel que $P(A)$ soit non nulle et nilpotente, avec P unitaire de degré 2.

3) On pose $c_t = A - tP(A)$. Pour $t \in [-3, 3]$, calculer les valeurs propres de c_t. On admet que ce que l'on observe est valable pour tout t réel.

4) En déduire un polynôme Q tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(c_t) = 0$.

5) Donner une norme N sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. La programmer en Python.

Planche 3 :

On définit :

$$\theta_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - x^{2^k}\right)$$

1) Définir une fonction `dessin(n)` affichant les graphes de θ_k sur $[-1, 1]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

2) Conjecturer parité/imparité, monotonie et convergence simple sur $[-1, 1]$. Les démontrer.

3) Montrer que $(\theta_n)_n$ converge simplement vers une fonction θ continue et que θ vérifie :

$$\theta(x) = (1 - x)\theta(x^2)$$

4) Déterminer toutes les fonctions continues $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x,\ f(x) = (1 - x)f(x^2)$$

5) Supposant que θ est développable en série entière $\theta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, montrer que :

$$a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n$$

Planche 4 :

Soit $p \in]0, 1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des v.a. indépendantes suivant une loi de probabilité définie de la façon suivante :

$$P(X_n = 1) = p \text{ et } P(X_n = 2) = 1 - p$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Y_k = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \geqslant k\}$. On admet qu'il s'agit d'une v.a.

1) Justifier l'existence de Y_k.
Implanter une fonction simulant Y_k en fonction de k et de p.

2) Définir une fonction permettant de calculer une approximation m_k de $E(Y_k)$, pour un p donné.
Tracer m_k en fonction de k, pour $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$.

3) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$ et $n \geqslant 2$:

$$P(Y_k = n) = pP(Y_{k-1} = n - 1) + (1 - p)P(Y_{k-2} = n - 1)$$

4) En déduire que $E(Y_k) = pE(Y_{k-1}) + (1 - p)E(Y_{k-2}) + 1$.

5) Montrer qu'il existe $c_p \in \mathbb{R}$ tel que $E(Y_p) \sim c_p k$.